

Robno obnašanje potenčnih vrst

Osnutek diplomske naloge

Gaja Jamnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

25. februar 2022

1 Uvod

Diplomska naloga spada v področje kompleksne analize. Eden glavnih izrekov kompleksne analize pravi, da lahko vsako holomorfnostno funkcijo razvijemo v potenčno vrsto okoli neke točke v domeni. Razvoj v vrsto je enoličen, saj je določen z odvodi funkcije v tej točki. Če je funkcija cela, t.j. holomorfnostna na celi kompleksni ravnini, je z razvojem v vrsto v poljubni točki definirana povsod. Vendar, čim ima funkcija kakšno izolirano singularnost, bo predstavljena z več različnimi vrstami na različnih območjih. To pomeni, da so lastnosti funkcij podane z zaporedjem koeficientov iz razvoja v vrsto. Osrednja tema diplomske naloge bo iskanje povezave med koeficienti potenčnih vrst ter singularnostmi funkcije na robu konvergenčnega območja.

2 Holomorfna razširitev

Za nadaljnje razumevanje najprej spoznajmo pojem holomorfne razširitve.

Definicija 1 Naj bo f_1 kompleksna funkcija, holomorfnostna na Ω_1 , in f_2 holomorfnostna na Ω_2 , ter naj bo $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Če je $f_1 \equiv f_2$ na $\Omega_1 \cap \Omega_2$, pravimo, da je f_2 **holomorfna razširitev** f_1 na Ω_2 .

Definicija 2 Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfnostna na D . Če ne obstaja holomorfna razširitev f zunaj množice D , potem pravimo, da je D **domena holomorfnosti** funkcije f .

V nadaljevanju se omejimo na potenčne vrste razvite okoli točke 0. Naj bo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in naj bo R konvergenčni polmer vrste.

Oglejmo si klasičen primer holomorfne razširitve.

Zgled 1 Obravnavajmo vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. To je razvoj funkcije $f(z) = \frac{1}{1-z}$ okoli točke $a = 0$. Opazimo lahko, da vrsta konvergira za $|z| < 1$ in divergira za $|z| > 1$. Ker je f holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, obstaja holomorfna razširitev iz enotskega diska na prebodeno kompleksno ravnino. Kompleksno razširitev lahko konstruiramo tako, da f razvijemo v drugih točkah različnih od 1. Unija konvergenčnih območij bo ravno $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

V zgledu smo pokazali, da lahko kljub singularnosti na robu konvergenčnega območja funkcijo holomorfno razširimo čez enotski disk. Če si podrobneje pogledamo obnašanje v robnih točkah, opazimo, da konvergenca oz. divergenca na robu v splošnem ni povezana z možnostjo holomorfne razširitve v teh točkah. Na primer v $c = 1$ vrsta divergira in f ima v tej točki pol, zato v c ni holomorfna. Po drugi strani pa v $c = -1$ divergira ter je v tej točki holomorfna. V nadaljevanju pa bomo spoznali nekaj posebnih vrst pri katerih obstaja povezava med koeficienti vrste ter možnostjo holomorfne razširitve na robu konvergenčnega območja.

Pred nadaljevanjem si oglejmo še en zgled, ki motivira naslednji poglavji.

Zgled 2 Oglejmo si vrsto $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + \dots$. Zaporedje koeficientov se glasi

$$0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots$$

Opazimo lahko, da je v zaporedju veliko ničelnih koeficientov ter da se bloki zaporednih ničel večajo. Konvergenčni polmer vrste je 1, torej je f holomorfna na enotskem disku. Zanima nas, ali lahko tudi to funkcijo holomorfno razširimo izven diska.

Oglejmo si singularnosti funkcije na robu. Funkcijo lahko zapišemo kot $f(z) = z + f(z^2)$. Če v izraz vstavimo $z = 1$, dobimo $f(1) = 1 + f(1)$, kar velja natanko takrat, ko je $f(1) = \infty$. Torej $z = 1$ je singularnost. Če sedaj v ta zapis vstavimo še $z = -1$, dobimo $f(-1) = -1 + f(1)$. Našli smo še eno singularnost na robu, to je $z = -1$.

Podobno naredimo za $z = \pm i$. Funkcijo zapišemo kot $f(z) = z + z^2 + f(z^4)$ in vanjo vstavimo $z = \pm i$. Sledi, da sta ti vrednosti prav tako singularnosti.

Izkaže se, da lahko s podobno konstrukcijo pokažemo, da je singularnost vsaka točka iz krožnice, za katero velja $z^{2^n} = 1$. To pa je gosta podmnožica roba diska. Funkcije torej ne moremo razširiti preko roba konvergenčnega območja. Pravimo, da je $\Delta(0,1)$ **naravna meja holomorfnosti**.

3 Lakunarne vrste in izrek Ostrowskega

Prve vrste, ki jih bomo obravnavali lakunarne vrste. Za začetek definirajmo pojem lok holomorfности.

Definicija 3 Naj bo f holomorfnost na $\Delta(0, R)$, kjer je R konvergenčni polmer potenčne vrste. Zaprt lok $L \subseteq \delta\Delta(0, R)$ imenujemo **lok holomorfности funkcije f** , če lahko f holomorfno razširimo na vse točke iz L .

Definicija 4 **Lakunarna vrsta** je potenčna vrsta $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, če obstaja zaporedje $m_i \in \mathbb{N}$, tako da so $a_j = 0$, kadar velja:

$$m_i < j < m_{i+1}, i \in \mathbb{N}; \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (m_{i+1} - m_i) = \infty$$

Lakunarne vrste so intuitivno vrste, ki imajo veliko ničelnih koeficientov. Zaporedne bloke ničelnih koeficientov imenujemo vrzeli ("lacuna" = manjka-joči del), ki po velikosti naraščajo v neskončnost.

Zgled 3 S preprostim računom lahko preverimo, da sta slednji vrsti lakunarni.

- $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^{i^2}$
- $g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^{a^i}$; $a > 1$; $a \in \mathbb{N}$

Izrek 1 (Izrek Ostrowskega) Naj bo $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{m_i} z^{m_i}$ lakunarna vrsta z omejenim zaporedjem koeficientov. Potem zaporedje delnih vsot vrste S_{m_i} konvergira enakomerno na vsakem loku holomorfности funkcije f .

Bolj kot sam izrek je za nas pomembna njegova neposredna posledica, imenovana kriterij nerazširljivosti.

Posledica 1 (Kriterij nerazširljivosti) Naj bo $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{m_i} z^{m_i}$ lakunarna vrsta z omejenim zaporedjem koeficientov, ki divergira povsod na robu konvergenčnega območja $\delta\Delta(0, R)$. Potem je domena holomorfности funkcije f kar $\Delta(0, R)$.

4 Hadamardova lakunarna vrsta in izrek o vrzelih

Poleg lakunarnih vrst bomo spoznali še ene vrste s posebnim zaporedjem koeficientov, imenovane Hadamardove lakunarne vrste.

Definicija 5 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ je **Hadamardova lakunarna vrsta**, če obstaja $\delta > 0$ in zaporedje $m_0, m_1, \dots \in \mathbb{N}$, tako da:

1. $m_{i+1} - m_i > \delta m_i; \forall i$
2. $a_j = 0$, če $m_i < j < m_{i+1}$, ter $a_{m_i} \neq 0$

Očitno velja, da je Hadamardova lakunarna vrsta tudi lakunarna vrsta. Zanje velja naslednji izrek.

Izrek 2 (Hadamardov izrek o vrzelih) Naj bo $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ Hadamardova lakunarna vrsta in naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer vrste. Potem velja, da je $\Delta(0, R)$ domena holomorfnosti funkcije f .

Če primerjamo Hadamardov izrek in kriterij nerazširljivosti, opazimo, da je Hadamardov izrek po eni strani splošnejši saj ne zahteva omejenosti ter divergence na robu. Po drugi strani pa je pogoj iz definicije Hadamardove lakunarne vrste strožji kot iz definicije splošne lakunarne vrste, zato je izrek hkrati ožji kot kriterij nerazširljivosti.

Primer Hadamardove lakunarne vrste je na primer

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^{a^i}; \quad a > 1 \quad a \in \mathbb{N}.$$

Za $a = 2$ je to ravno primer iz zgleda 2. Tako lahko dejstvo, da je $\Delta(0, 1)$ naravna meja holomorfnosti, dokažemo tudi z uporabo Hadamardovega izreka o vrzelih.

5 Izrek Fatou-Hurwitz-Pólya

V prejšnjih poglavjih smo preko kriterija nerazširljivosti in Hadamardovega izreka o vrzelih spoznali, da imajo nekatere vrste za domeno holomorfnosti kar svoje konvergenčno območje. Ugotovili bomo, da je takih vrst veliko, celo neštavno mnogo.

Izrek 3 (Fatou-Hurwitz-Pólya) Naj bo $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ potenčna vrsta s konvergenčnim polmerom $R > 0$. Potem ima množica vseh funkcij oblike $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i a_i z^i$, kjer je $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$, z domeno holomorfnosti $\Delta(0, R)$, moč kontinuuma.

6 Szegőv razširitveni izrek

V drugem poglavju smo obravnavali dva zgleda. V prvem smo ugotovili, da lahko $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$; $|z| < 1$ holomorfno razširimo izven enotskega diska do racionalne funkcije $f(z) = \frac{1}{1-z}$ s polom na $\delta\Delta$. V drugem zgledu pa smo obravnavali Hadamardovo lakunarno vrsto $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, ki se je ne da razširiti izven konvergenčnega območja. Ta pojav ni naključje in ga opiše naslednji izrek.

Izrek 4 (Szegőv razširitveni izrek) *Naj bo $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ potenčna vrsta s končno mnogo različnimi koeficienti. Potem bodisi lahko f razširimo do racionalne funkcije $\hat{f} = \frac{p(z)}{(1-z^k)}$, kjer je $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ in $k \in \mathbb{N}$, bodisi f ne moremo razširiti izven konvergenčnega območja.*

Literatura

- [1] J. Deane, *Natural boundary*, v: Mathworld-A Wolfram Web Resource, 21.2.2022, [28.2.2022], dostopno na <https://mathworld.wolfram.com/NaturalBoundary.html>.
- [2] S. Madan, *Some G Pólya gems from complex analysis*, Resonance **19** (Apr., 2014), 323-337.
- [3] R. Remmert, *Classical topics in complex function theory*, Graduate texts in mathematics **172**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [4] R. Remmert, *Theory of complex functions*, Graduate texts in mathematics **122**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] E. W. Weisstein, *Analytic continuation*, v: Mathworld-A Wolfram Web Resource, 21.2.2022, [28.2.2022], dostopno na <https://mathworld.wolfram.com/AnalyticContinuation.html>.