

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Ivan Kobe

Snopi nad okoliši (osnutek)

Delo diplomskega seminarja

Mentor: Dr. Alex Simpson

Ljubljana, 2022

KAZALO

1. Uvod	4
2. Okvirji	4
3. Grothendieckove topologije in lokacije	5
4. Izrek	6

Snopi nad okoliši (osnutek)

POVZETEK

Angleški prevod slovenskega naslova dela

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2020):

Ključne besede:

Keywords:

1. UVOD

V pričujočem osnutku bom predstavil enega pomembnejših izrekov iz svojega nastajajočega diplomskega dela, ki pravi, da vsaka lokacija porodi okvir.

V diplomu sem si za glavni cilj zadal dokazati, da je negacija hipoteze o kontinuumu združljiva z aksiomi Zermelo-Fraenklove teorije množic. Ta rezultat je prvi dokazal Paul Cohen leta 1963. Dokaz bomo konstruirali tako, da bomo v kategoriji snopov nad nekim določenim okolišem, ki bo služila kot model teorije množic, definirali **Cohenov snop** in nato pokazali, da obstajata prava monomorfizma med snopom naravnih števil in Cohenovim snopom ter Cohenovim snopom in snopom realnih števil.

Ker je delo v kategorijah snopov nad okoliši zahtevno, nam bo konstrukcijo precej olajšala ugotovitev, da lahko vsak okoliški topos zagledamo kot kategorijo snopov nad neko lokacijo. Rečeno nekoliko bolj formalno: dokazali bomo, da vsaka lokacija porodi okvir, in sta nadalje kategoriji snopov nad dano lokacijo in kategorija snopov nad okvirjem, ki ga porodi, ekvivalentni.

2. OKVIRJI

Najprej defirajmo pojem **okvirja** in nekaj povezanih pojmov.

Definicija 2.1. Delni ureditvi $(P, \leq)$ previmo **mreža**, če ima vsak par $(x, y) \in P$ infimum (največjo spodnjo mejo) in supremum (najmanjšo zgornjo mejo). Infimum elementov x in y označujemo $x \wedge y$, njun supremum pa $x \vee y$.

Definicija 2.2. Mreža $(L, \leq)$ je **polna mreža**, če obstajata infimum in supremum poljubne družine $S \subseteq L$. Infimum družine S označujemo $\bigwedge S$, njen supremum pa $\bigvee S$.

Opomba 2.3. Za to, da bi bila mreža L polna, zadošča že, da ima vsaka družina $S \subseteq L$ infimum $\bigwedge S$ (ekvivalentno bi zadoščal tudi obstoj poljubnih supremumov). V tem primeru lahko namreč supremum družine S izrazimo kot infimum množice zgornjih meja družine S .

$$\bigvee S := \bigwedge \{x \in L \mid \forall y \in S. y \leq x\}$$

Definicija 2.4. Polni mreži F pravimo **okvir**, če zadošča zahtevi, da se binarni infimumi distribuirajo čez poljubne supremume. Formalno lahko ta distributivnostni zakon opišemo s sledečim pogojem:

$$\forall S \subseteq F. \forall x \in F. x \wedge \bigvee_{s \in S} s = \bigvee_{s \in S} (x \wedge s).$$

Opomba 2.5. Naj bo (X, τ) topološki prostor. Potem je družina odprtih množic τ okvir, urejen glede na relacijo vsebovanosti $\subseteq$. Glede na to ureditev so supremumi očitno unije, saj je poljubna unija odprtih množic odprta. Ker je topologija zaprta za končne preseke, so infimumi končnih množic preprosto preseki. Opomba 2.3 nam pove, da je τ polna mreža. Ker vse operacije, ki nastopajo v distributivnostnem zakonu, sovpadajo s preseki ali unijami množic, za katere vemo, da se vzajemno distribuirajo, je τ okvir. Infimum poljubne družine $Y \subseteq X$ lahko definiramo kot zaprtje preseka:

$$\bigwedge Y := \text{int}(\bigcap Y).$$

Opomba 2.6. Dual distributivnostnega zakona iz definicije ne velja nujno. Naj bo $\tau_{(E, \mathbb{R})}$ evklidska topologija na $\mathbb{R}$. Naj bo $x := (-1, 0)$ in $S := \{(-\epsilon, 1 + \epsilon) \mid \epsilon \in (0, 1)\}$. Vidimo lahko, da $\bigwedge_{s \in S} (x \vee s) \neq x \vee \bigwedge S$, saj je $\bigwedge_{s \in S} (x \vee s) = (-1, 1)$ in $x \vee \bigwedge S = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Definicija 2.7. Naj bosta F in G okvirja. Preslikavi $F \xrightarrow{f} G$ pravimo **homomorfizem okvirjev**, če ohranja supremume poljubnih družin in binarne infimume.

Opomba 2.8. Homomorfizem okvirjev v splošnem ne ohranja poljubnih infimov. Čeprav ima, kot omenjeno, v okvirju vsaka družina infimum, je torej to v nekem smislu odvečna struktura.

Opomba 2.9. Naj bosta (X, τ_X) in (Y, τ_Y) topološka prostora in $X \xrightarrow{f} Y$ zvezna. Ker je definicija zveznosti podana s pogoji na prasliko, zlahka vidimo, da je praslika f^* homomorfizem okvirjev. Vsak topološki prostor nam torej da okvir in vsaka zvezna prostora med topološkimi prostori nam da homomorfizem okvirjev.

3. GROTHENDIECKOVE TOPOLOGIJE IN LOKACIJE

Premikamo se na obravnavo Grothendieckovih topologij. Pojem Grothendieckove topologije lahko obravnavamo kot dodatno posplošitev okvirjev, saj nam omogoča, da eksplicitno povemo, katere družine naj bodo pokritja danega elementa.

V nadaljevanju naj $(P, \leq)$ zmeraj označuje poljubno delno ureditev.

Definicija 3.1. Podmnožici $I \subseteq P$ pravimo **ideal**, če je "navzdol zaprta", tj. če zadošča naslednjemu pogoju:

$$\forall i \in I. \forall p \in P. (p \leq i \Rightarrow p \in I).$$

Množico vseh idealov delne ureditve $(P, \leq)$ označujemo $\text{Idl}(P)$.

Definicija 3.2. Naj bo $p \in P$. Množico vseh elementov, manjših od p , imenujemo **glavni ideal elementa** p in jo označimo $\downarrow p$. Torej:

$$\downarrow p := \{x \in P \mid x \leq p\}.$$

Definicija 3.3. Naj bo $p \in P$. Podmnožicam $S \subseteq \text{Idl}(\downarrow p)$ pravimo **sita nad elementom** p .

Definicija 3.4. Preslikavi $\mathcal{J} : P \rightarrow 2^{\text{Idl}(\downarrow p)}$ pravimo **Grothendieckova topologija nad ureditvijo** P , če za vsak $p \in P$ zadošča naslednjim aksiomom:

- (1) Vsebovanost maksimalnega sita: $\downarrow p \in \mathcal{J}(p)$.
- (2) Stabilnost: $\forall S \in \mathcal{J}(p). \forall q \in P. (q \leq p \Rightarrow S \cup \downarrow q \in \mathcal{J}(p))$.
- (3) Transitivnost:

$$\forall S \in \mathcal{J}(p). \forall R \in \text{Idl}(\downarrow p). ((\forall q \in S. R \cup \downarrow q \in \mathcal{J}(q)) \Rightarrow (R \in \mathcal{J}(p))).$$

Paru $(P, \mathcal{J})$, tj. delno urejeni množici, opremljeni z Grothendieckovo topologijo, pravimo **lokacija**.

Opomba 3.5. Na poljubnem okvirju F lahko definiramo standardno Grothendieckovo topologijo $\mathcal{J}_F$ na sledeči način. Za $p \in F$ naj bo $\mathcal{J}_F(p) := \{S \subseteq F \mid \bigvee S = p\}$. Zlahka lahko preverimo, da $\mathcal{J}_F$ res zadošča aksiomom za Grothendieckovo topologijo.

V nadaljevanju naj $(P, \mathcal{J})$ označuje poljubno lokacijo.

Definicija 3.6. Idealu $I \in \text{Idl}(P)$ pravimo $\mathcal{J}$ -ideal, če zadošča naslednjemu pogoju:

$$\forall p \in P. \forall S \in \mathcal{J}(p). (S \subseteq I \Rightarrow p \in I).$$

Ta pogoj lahko opišemo z besedami, da so $\mathcal{J}$ -ideali zaprti za pokritja. Množico $\mathcal{J}$ -idealov lokacije $(P, \mathcal{J})$ označujemo $\mathcal{J}\text{-Idl}(P)$.

4. IZREK

Definicija 4.1. Naj bosta I in J ideala lokacije $(P, \mathcal{J})$. Definirajmo binarno operacijo:

$$I \rightarrow J := \{z \in P \mid \downarrow p \cup I \subseteq J\}.$$

Opomba 4.2. To operacijo označujemo s simbolom $\rightarrow$, ki spominja na implikacijo, ker je, kakor se izkaže, $\rightarrow|_{\mathcal{J}\text{-Idl}(P)^2}$ natanko Heytingova implikacija v Heytingovi algebri $\mathcal{J}\text{-Idl}(P)$. Izrek, ki se mu približujemo, bo povedal, da je ta množica okvir, velja pa tudi, pa je vsak okvir Heytingova algebra (in obratno).

Lema 4.3. Naj bo $I \in \text{Idl}(P)$ in $J \in \mathcal{J}\text{-Idl}(P)$. Potem je $I \rightarrow J \in \mathcal{J}\text{-Idl}(P)$

Dokaz. Očitno je $I \rightarrow J$ navzdol zaprta, zato moramo dokazati zgolj, da je zaprta za pokritja.

Naj bo $p \in P$, $\mathcal{C} \in \mathcal{J}(p)$ in $\mathcal{C} \in I \rightarrow J$. Dokazati želimo, da velja $p \in I \rightarrow J$, oziroma ekvivalentno $\downarrow p \cap I \subseteq J$, kar lahko še drugače izrazimo s pogojem $\forall y \in I. y \leq p \Rightarrow y \in J$. Naj bo torej $y \in I$ in naj velja $y \leq p$. Najti želimo sito $\mathcal{D} \in \mathcal{J}(y)$, za katero bo veljalo $\mathcal{D} \subseteq J$.

Na podlagi stabilnostnega aksioma za Grothendieckovo topologijo in ker je $y \leq p$, velja $\mathcal{D} := \downarrow y \cap \mathcal{C} \in \mathcal{J}(p)$. Dokazati želimo, da velja $\mathcal{D} \subseteq J$.

Ker je $q \in I$, očitno velja $\forall y \in \mathcal{C}. \downarrow y \cap \downarrow q \subseteq J$. Ampak od tod neposredno sledi:

$$\mathcal{D} := \downarrow y \cap \mathcal{C} \in \mathcal{J}(p) = \downarrow y \cap \bigcup_{q \in \mathcal{C}} \downarrow q = \bigcup_{q \in \mathcal{C}} (\downarrow y \cap \downarrow q) \subseteq J.$$

□

Lema 4.4.

$$\forall (I, J, K) \in \text{Idl}(P)^3. J \leq I \rightarrow K \Leftrightarrow I \cap J \subseteq K$$

Dokaz. S kratkim računom sledi neposredno iz definicije.

□

Izrek 4.5. $\mathcal{J}\text{-Idl}(P)$ je glede na relacijo vsebovanosti $\subseteq$ okvir.

Dokaz. Infimumi so preseki in ker je presek poljubne družine $\mathcal{J}$ -idealov očitno $\mathcal{J}$ -ideal, je $\mathcal{J}\text{-Idl}(P)$ polna mreža, kar pomeni, da moramo dokazati zgolj veljavo distributivnostnega zakona.

Vzemimo $\{I\} \cup \{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{J}\text{-Idl}(P)$. Označimo $K := \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (I \wedge J_\lambda)$. Ker je neenakost $K \leq I \wedge \bigvee_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$ trivialna, moramo dokazati zgolj obratno neenakost.

Toda velja:

$$\begin{aligned} I \wedge \bigvee_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda \leq K &\Leftrightarrow \bigvee_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda \leq I \rightarrow K \Leftrightarrow \bigvee_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda \subseteq I \rightarrow K \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda. J_\lambda \subseteq I \rightarrow K \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda. J_\lambda \leq I \rightarrow K \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda. I \wedge J_\lambda \leq K \Leftrightarrow \top \end{aligned}$$

.

(*): lema 4.4

(**): $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda \subseteq \bigvee_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$

□