

Sprehodi z naključnimi premutacijami

Osnutek

Tim Milanez

Mentor: doc. dr. Urban Jezernik

Ljubljana, 2022

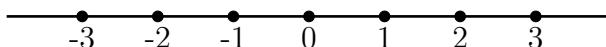
1 Uvod

Naj bo S neka podmnožica permutacijske grupe S_n , ki to grupo generira. Motiviralo nas bo naslednje vprašanje: Kako dolge produkte elementov iz S moramo tvoriti, da bomo pokrili vse elemente v S_n ? Preden se posvetimo odgovoru na to vprašanje, ga formulirajmo v jeziku teorije grafov, in sicer z vpeljavo Caylejevega grafa.

Definicija 1. Naj bo G grupa in $S \subseteq G$, za katero velja $S = S^{-1}$. Caylejev graf $\text{Cay}(G, S)$ grupe G glede na množico S je graf z množico vozlišč $V = G$ in množico povezav $E = \{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S\}$.

Opazimo, da če je množica S končna, potem je $\text{Cay}(G, S)$ regularen stopnje $|S|$.

Primer 1. Naj bo $G = \mathbb{Z}_n$ in $S = \{-1, 1\}$. Caylejev graf $\text{Cay}(G, S)$ je potem ravno pot dolžine $n - 1$.



Poljuben graf lahko opremimo s funkcijo razdalje, s katero graf postane metrični prostor. Razdalja $d(x, y)$ med dvema vozliščema x, y je dana kot minimum dolžine vseh poti, ki se začnejo v x in končajo v y . Premer grafa je potem definiran kot največja vrednost, ki jo funkcija razdalje lahko doseže. Tukaj dopuščamo tudi neskončno vrednost premera, kakršnega imajo na primer nepovezani grafi.

Naj bo $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ za neko grupo G in $S \subseteq G$, $S = S^{-1}$. Opazimo, da je Γ povezan natanko tedaj, ko S generira G . Za $x \in \Gamma$ velja

$$d(1, x) = \min\{k \geq 0 \mid x = s_1 s_2 \cdots s_k \text{ za neke } s_i \in S\}.$$

Naš cilj bo omejiti zgornjo vrednost v primeru $G = S_n$. Glavni izrek, ki ga bomo dokazali v tej smeri, je naslednji:

Izrek 1. Naj bosta g, h naključno izbrana elementa S_n , ki to grupo generirata, in $S = \{g, h, g^{-1}, h^{-1}\}$. Potem je verjetnost, da je premer $\text{Cay}(S_n, S)$ največ $O(n^2(\log n)^c)$, enaka $1 - o(1)$, za neko absolutno konstanto c .

Z drugimi besedami, izrek pravi, da gre verjetnost, da je premer danega grafa največ $O(n^2(\log n)^c)$, proti 1, ko raste n čez vse meje. Dokaz izreka bo slonel na pomožnem rezultatu, ki je iz vidika teorije veliko bolj zanimiv. Preden ga lahko podamo, pa potrebujemo še nekaj definicij.

2 Ekspanzivni grafi

Definicija 2. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ končen neusmerjen graf. Za $V_1, V_2 \subseteq V$ označimo s $\xi(V_1, V_2) = \{\text{povezave z enim krajiščem v } V_1 \text{ in drugim v } V_2\}$ in $\xi(V_1) = \xi(V_1, V \setminus V_1)$. *Cheegerjeva konstanta* grafa Γ je definirana kot

$$h(\Gamma) = \min_{\substack{\emptyset \neq W \subseteq V, \\ |W| \leq \frac{1}{2}|V|}} \left\{ \frac{|\xi(W)|}{|W|} \right\}.$$

Vrednost $|\xi(W)|$ nam šteje ravno število povezav, ki zapustijo dano množico W . Cheegerjeva konstanta nam torej podaja merilo za to, kako močno je dan graf povezan. Če je Cheegerjeva konstanta majhna, graf ni močno povezan in lahko ob odstranitvi majhnega števila povezav hitro razpade na več komponent.

Primer 2. Izračunajmo Cheegerjavo konstanto polnega grafa K_n . Označimo njegova vozlišča z $1, 2, \dots, n$. Ker polni graf izgleda v vsakem vozlišču "enak", se lahko omejimo na množice prvih j vozlišč. Velja

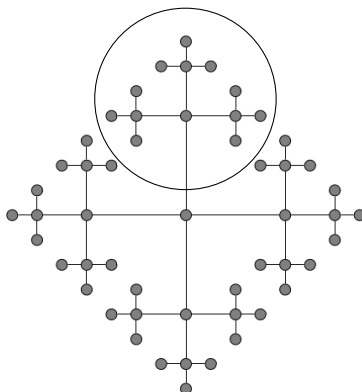
$$h(K_n) = \min_{1 \leq j \leq \frac{n}{2}} \left\{ \frac{|\xi(\{1, \dots, j\})|}{|\{1, \dots, j\}|} \right\} = \min_{1 \leq j \leq \frac{n}{2}} \left\{ \frac{j(n-j)}{j} \right\} = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Ker je izraz na desni lahko poljubno velik, so polni grafi močno povezani, kar je v skladu z našo intuicijo.

Primer 3. Naj bo $T_{d,k}$ d -regularno drevo globine k . Če za W vzamemo eno od glavnih vej tega drevesa (glej sliko spodaj), potem mora

$$h(T_{d,k}) \leq \frac{1}{|W|} = \frac{d}{|T_{d,k}| - 1}.$$

Za velike vrednosti k ali d je izraz na desni majhen, zato je Cheegerjeva konstanta tega drevesa v splošnem majhna.



Grafa, ki ima visoko Cheegerjavo kontanto, ni bilo težko najti. Veliko težje pa je konstruirati grafe, pri katerih želimo ne le navzdol omejiti Cheegerjave konstante, ampak tudi navzgor omejiti stopnjo vozlišč. V primeru polnih grafov K_n je maksimalna stopnja vozlišč lahko poljubno velika, torej ne zadoščajo našim pogojem. Takšnim grafom bomo rekli, da so ekspanzivni.

Definicija 3. Družina $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ končnih povezanih grafov $\Gamma_i = (V_i, E_i)$ je *ekspanzivna*, če obstajata takšni konstanti $v \geq 1, h > 0$, da veljajo naslednji trije pogoji:

$$1) |V_i| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty.$$

2) Za vsak $i \in \mathbb{N}$ velja

$$\max_{x \in V_i} \deg(x) \leq v.$$

3) Za vsak $i \in \mathbb{N}$ velja

$$h(\Gamma_i) \geq h.$$

Kot smo že omenili zgoraj, je konkreten primer ekspanzivne družine težko najti. Pa vendar se izkaže, da je takšnih grafov v izobilju.

Enega od razlogov, zakaj se nam takšne objekte izplača študirati, nam podaja naslednja trditev:

Trditev 1. Naj bo $\Gamma = (V, E)$ povezan graf, $\Delta = \max_{x \in V} \deg(x)$. Potem velja

$$\text{diam}(\Gamma) \leq 2 \frac{\log \frac{|\Gamma|}{2}}{\log(1 + \frac{h(\Gamma)}{\Delta})} + 3.$$

Za ekspanzivno družina grafov $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ torej po zgornji trditvi velja

$$\text{diam } \Gamma_n = O(\log |\Gamma_n|).$$

Dokaz. Naj bo $x \in V$. Za $n \in \mathbb{N}_0$ si oglejmo krogle

$$B_x(n) = \{y \in V : d_\Gamma(x, y) \leq n\}.$$

Pokažimo, da velja $|B_x(n)| \geq \min\{\frac{|\Gamma|}{2}, (1 + \frac{h(\Gamma)}{\Delta})^n\}$. Recimo, da je $|B_x(n)| < \frac{|\Gamma|}{2}$. Potem je

$$|B_x(n+1) \setminus B_x(n)| \geq \frac{|\xi(B_x(n))|}{\Delta} \geq \frac{h(\Gamma)}{\Delta} |B_x(n)|,$$

iz koder dobimo

$$|B_x(n+1)| \geq (1 + \frac{h(\Gamma)}{\Delta}) |B_x(n)|.$$

Z indukcijo, in upoštevanjem, da je $|B_x(n)| = 1$, sledi želena neenakost.

Naj bosta $x, y \in V$ in n najmanjše naravno število, za katerega je

$(1 + \frac{h(\Gamma)}{\Delta})^n \geq \frac{|\Gamma|}{2}$. Potem je zagotovo $|B_x(n)| \geq \frac{|\Gamma|}{2}$ in $|B_y(n)| \geq \frac{|\Gamma|}{2}$, torej $|B_x(n+1) \cap B_y(n)| \neq 0$. To pa pomeni, da je $d(x, y) \leq 2n + 1$. Ker je $n = \left\lceil \frac{\log \frac{|\Gamma|}{2}}{\log(1 + \frac{h(\Gamma)}{\Delta})} \right\rceil$, je trditev dokazana. □

Ena možnost za omejevanje diametra je torej pokazati, da je dana družina grafov ekspanzivna. Mi seveda ne bomo pokazali, da so v izreku omejeni grafi ekspanzivni, saj bi sicer dobili veliko boljšo mejo za premer, tj. $O(\log |\text{Cay}(S_n, S)|) = O(\log(n!)) = O(n \log n)$, bomo pa to pokazali za nek soroden graf:

Izrek 2. Izberimo $d \geq 2$ permutacij $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_d$ naključno iz S_n . Naj bo $\mathcal{G}_n$ neusmerjen graf, katerega vozlišča so sestavljena iz vseh r -seznamov različnih vrednosti množice $\{1, \dots, n\}$, dva seznama $(v_1, v_2, \dots, v_r), (u_1, u_2, \dots, u_r)$ pa sta si sosednja, če velja bodisi $(v_1, v_2, \dots, v_r) = (\pi_i(u_1), \pi_i(u_2), \dots, \pi_i(u_r))$ bodisi $(u_1, u_2, \dots, u_r) = (\pi_i(v_1), \pi_i(v_2), \dots, \pi_i(v_r))$ za nek π_i . Potem je $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ družina eskpanderjev.

3 Absolutno ekspanzivne družine

Računanje Cheegerjave konstante grafa je lahko zelo zahtevno, saj moramo pogledati vse podmnožice grafa, katerih moč ne presega polovice moči celotnega grafa. Da si olajšamo delo z dokazovanjem, da je kakšna družina ekspanzivna, bomo uvedli (skoraj) ekvivalentno definicijo ekspanzivne družine. Ker se bomo v diplomski srečevali le z regularnimi grafi, se omejimo zdaj na njih.

Definicija 4. Za d -regularen graf $\Gamma = (V, E)$ definiramo njegovo *normalizirano matriko sosednosti* $M = (\frac{a(x,y)}{d})_{x,y \in V}$, kjer $a(x,y)$ označuje število povezav med x in y .

Izkaže se, da je spekter normalizirane matrike sosednosti M d -regularnega grafa Γ vsebovan v intervalu $[-1, 1]$, in da ima M vedno -1 in 1 za lastni vrednosti. Številu $\rho_\Gamma = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec } M, \lambda \neq \pm 1\}$ bomo rekli *ekvidistribucijski radij* grafa Γ .

S pomočjo ekvidistribucijskega radija definiramo:

Definicija 5. Družina $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ končnih povezanih grafov je *absolutno ekspanzivna*, če obstajata konstanti $v \geq 1, \rho < 1$, da velja:

$$1) |V_i| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$$

2) Za vsak $i \in \mathbb{N}$ velja

$$\max_{x \in V_i} \deg(x) \leq v.$$

3) Za vsak $i \in \mathbb{N}$ velja

$$\rho_{\Gamma_i} \leq \rho.$$

Povezavo med absolutno ekspanzivnimi družinami in ekspanzivnimi družinami nam podaja naslednji pomembni izrek:

Izrek 3. 1) $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ absolutno ekspanzivna $\implies (\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ekspanzivna.

2) $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ekspanzivna $\implies (\tilde{\Gamma}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ absolutno ekspanzivna, kjer $\tilde{\Gamma}_i$ dobimo tako, da Γ_i dodamo zanko na vsakem vozlišču.

Literatura

- [1] E. Kowalski, *An Introduction to Expander Graphs*, Zbirka SMF / Cours spécialisés **26**, Société Mathématique de France, kraj, 2019; dostopno tudi na <https://books.google.si/books?id=BkmAxQEACAAJ>.
- [2] H.A. Helfgott, A. Seress in A. Żuk, *Random generators of the symmetric group: Diameter, mixing time and spectral gap*, Journal of Algebra **421** (2015) 349–368; dostopno tudi na <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869314004797>.
- [3] J. Friedmann, A. Joux, Y. Roichman, J. Stern in J.-P. Tillich, *The action of a few permutations on r -tuples is quickly transitive*, Random Structures Algorithms **12** (4) (1998) 335–350.