

Stoneov reprezentacijski izrek in vektorske mreže s krepko enoto

David Čadež

Mentor: dr. Marko Kandić

1 Uvod

To diplomsko delo spada na področje algebre, topologije in funkcionalne analize. Glavni cilj bo predstaviti strukture, na katerih ima glavni pomen urejenost, kot določene topološke prostore.

V prvem delu diplomske naloge se bomo ukvarjali z distributivnimi mrežami in njihovimi reprezentacijami. Opisali bomo njihov spekter in dokazali, da obstaja bijekcija med Boolovimi algebrami in kompaktnimi popolnoma nepovezanimi topološkimi prostori. Omenili bomo tudi dodatek, ki poveže polnost Boolove algebre in ekstremno nepovezanost spektra.

V drugem delu pa bo cilj dokazati, da obstaja bijekcija med Banachovimi mrežami in prostorom realnih funkcij na popolnoma nepovezanem kompaktu.

2 Stoneov reprezentacijski izrek

Začnimo z delno urejenostjo.

Definicija 2.1. Množica M je *delno urejena*, kadar je na njej definirana binarna relacija, ki je *refleksivna*, *antisimetrična* in *tranzitivna*.

Definicija 2.2. Delno urejena množica M je *mreža*, kadar za vsak par $a, b \in M$ obstajata elementa

$$a \vee b = \sup\{a, b\}$$

$$a \wedge b = \inf\{a, b\},$$

kjer sta infimum oz. supremum definirana kot največji oz. najmanjši element, ki je manjši oz. večji od obeh.

Primer 2.3. Nekaj primerov mrež:

- Potenčna množica 2^X poljubne množice X , urejena z inkluzijo.
- Naravna števila, urejena z deljivostjo. V tem primeru je infimum največji skupni delitelj, supremum pa najmanjši skupni večkratnik.

- Poljubni vektorski prostor oblike F^n za neko linearno urejeno množico F , kjer na vektorjih uvedemo urejenost po komponentah.

◇

Dalje se bomo omejili na distributivne mreže, tj. take, da sta operaciji $\vee$ in $\wedge$ distributivni ena glede drugo.

Definicija 2.4. Distributivna mreža M je *Boolova algebra*, če ima največji element $1 = \sup M$ in najmanjši element $0 = \inf M$ in če za vsak $x \in M$ obstaja tak $x' \in M$, da je $x \vee x' = 1$ in $x \wedge x' = 0$. Elementu x' rečemo komplement x znotraj M .

Primer 2.5. Množica vseh preslikav $f : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$, na kateri uvedemo relacijo $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1] : f(x) \leq g(x)$, je Boolova algebra. Očitno je *največji element* funkcija, konstantno enaka 1 in *najmanjši element* funkcija, konstantno enaka 0. Preveriti moramo še, da obstajajo komplementi. Vzamemo neko funkcijo $f : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$. Za njen komplement $g : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ mora veljati $f \wedge g = 0$, torej $\forall x \in [0, 1] : \min\{f(x), g(x)\} = 0$. Podobno iz $f \vee g = 1$ sledi $\forall x \in [0, 1] : \max\{f(x), g(x)\} = 1$. Torej je $g(x) := 1 - f(x)$ komplement funkcije f znotraj te Boolove algebre. ◇

Definicija 2.6. Podmnožico $I \subseteq M$ distributivne mreže imenujemo *ideal* mreže M , kadar vsebuje 0 in izpolnjuje naslednja pogoja:

$$\forall a, b \in I \Rightarrow a \vee b \in I, \quad \forall c \in I \Rightarrow [0, c] \subseteq I.$$

Če poleg tega izpolnjuje še pogoj

$$\forall a, b \in I : a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I \vee b \in I,$$

postane I *praideal*.

Množica pravih praidealov z ustrezno topologijo bo topološki prostor, ki ga bomo priredili Boolovi algebri.

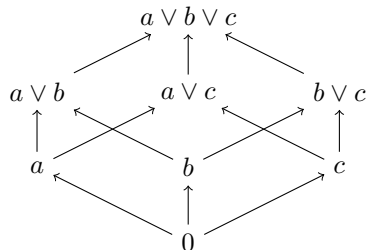
Definicija 2.7. *Spekter* je topološki prostor pravih praidealov, na kateri za bazo topologije vzamemo množice $O_x = \{P \in \mathcal{P} \mid x \notin P\}$.

Da se dokazati, da so odprte in kompaktne podmnožice spektra natanko množice oblike $\mathcal{O}_a$ za $a \in M$. Pri tem bi uporabili, da velja $\mathcal{O}_A \subseteq \mathcal{O}_B \Leftrightarrow I(A) \subseteq I(B)$. Iz tega sledijo naslednje ekvivalence.

Trditev 2.8. *Spekter $sp(M)$ distributivne mreže M z najmanjšim elementom 0 je topološki prostor, za katerega velja:*

- *Spekter je Hausdorffov topološki prostor natanko tedaj, ko je distributivna mreža M Boolov kolobar.*
- *Spekter je kompakten Hausdorffov topološki prostor natanko tedaj, ko je distributivna mreža M Boolova algebra.*

Slika 1: Primer Boolove algebre na 8 elementih.



Spomnimo se naslednje definicije iz topologije.

Definicija 2.9. Pravimo, da je topološki prostor *popolnoma nepovezan*, kadar so njegove *komponente* za povezanost točke.

Izrek 2.10. [Stone] Za vsako Boolovo algebro B obstaja tak popolnoma nepovezan kompakten topološki prostor S , da je B izomorfna Boolovi algebri B_S vseh odprto-zaprtyh podmnožic prostora S , urejenih z relacijo inkluzije. Popolnoma nepovezan kompakten prostor S je do homeomorfizma natančno določen z Boolovo algebro B in je homeomorfen njenemu spektru $\text{sp}(B)$.

Primer 2.11. Ponazorimo idejo izreka na enostavnem primeru. Naj bo B Boolova algebra, definirana 8 elementih, kot je prikazano na sliki 1. Potem je spekter enak množici

$$\{\{0, a, b, a \vee b\}, \{0, b, c, b \vee c\}, \{0, a, c, a \vee c\}\},$$

baza topologije so pa množice

$$\mathcal{O}_a = \{\{0, b, c, b \vee c\}\}, \quad \mathcal{O}_b = \{\{0, a, c, a \vee c\}\}, \quad \mathcal{O}_c = \{\{0, a, b, a \vee b\}\}.$$

Torej so vsi trije elementi spektra kot enojci odprte množice. Dobili smo diskretno topologijo na treh elementih. Sedaj pa še iz diskretne topologije na treh elementih izpeljimo začetno Boolovo algebro. Naj ima $\{a, b, c\}$ diskretno topologijo. Torej je vsaka množica odprta in zaprta. Enostavno vidimo, da inkluzija določa urejenost, ponazorjeno s sliko 2. Vidimo, da je res enaka začetni. $\diamond$

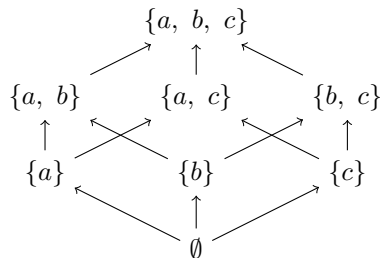
Definicija 2.12. Prostor je *ekstremno nepovezan*, kadar je zaprtje vsake odprte množice odprta množica.

Definicija 2.13. Mreža je *polna*, kadar ima vsaka njena neprazna podmnožica supremum in infimum.

Kljub imenu obstajajo prostori, ki so ekstremno nepovezani, ampak povezani v običajnem smislu.

Izrek 2.14. [Ogasawara] Boolova algebra je polna natanko tedaj, ko je njen spekter ekstremno nepovezan.

Slika 2: Boolova algebra, ki jo porodi diskretna topologija na 3 elementih.



Če sedaj združimo izreka 2.14 in 2.10, dobimo naslednji izrek.

Izrek 2.15. *Boolova algebra je polna natanko tedaj, ko je njen prirejen topološki prostor iz izreka 2.10 ekstremno nepovezan.*

3 Banachove mreže

Spomnimo se, da je *Banachov prostor* poln normiran prostor.

Delno urejen vektorski prostor V je realen vektorski prostor, na katerem definiramo urejenost, za katero velja

$$\forall x, y, z \in V : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$$

$$\forall x, y \in V : \forall \alpha > 0 : x \leq y \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y.$$

Če ima urejenost strukturo mreže, mu pravimo *Rieszov prostor*.

Definicija 3.1. Vsakemu elementu x Rieszovega prostora priredimo *pozitivni del* $x^+ = x \vee 0$, *negativni del* $x^- = (-x) \vee 0$ in *absolutno vrednost* $|x| = x \vee (-x)$.

Definicija 3.2. Če Rieszov prostor normiramo in je norma polna ter zanjo velja

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|, \quad (1)$$

potem prostoru pravimo *Banachova mreža*.

Primer 3.3. Poglejmo si primer Banachove mreže. Prostor vseh omejenih realnih zaporedij ℓ_∞ je vektorski prostor, če definiramo seštevanje in množenje s skalarjem po elementih. Urejenost tudi definiramo na običajen način s predpisom

$$\{x_n\} \leq \{y_n\} \iff \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n.$$

Na prostoru definiramo normo $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Opazimo, da za vsak $x \in \ell_\infty$ velja

$$|x| = (x \vee -x) = \{|x_n|\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Ostane nam samo še preveriti pogoj 1:

$$|x| \leq |y| \implies \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq |y| \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n|.$$

◇

Definicija 3.4. *Krepka enota* je element e Rieszovega prostora E , za katerega velja $\forall x \in E : \exists \lambda > 0 : |x| \leq \lambda e$.

V zgornjem primeru je lahko krepka enota katera koli pozitivna funkcija, ampak standardna izbira je funkcija, ki je konstantno enaka ena.

Definicija 3.5. *Rieszov homomorfizem* je linearna preslikava $T : U \rightarrow V$, za katero velja

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y) \quad \text{in} \quad T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$$

za vsaka elementa $x, y \in U$.

Rieszov homomorfizem je *Rieszov izomorfizem*, kadar je bijektiven in je njegov inverz tudi Rieszov homomorfizem.

Naslednji izrek nam pove, da so vse Banachove mreže mrežno izomorfne prostoru realnih funkcij na določenih topoloških prostorih. Pri dokazu si bomo pomagali z izrekom 2.10 o upodobitvi Boolovih algeber.

Izrek 3.6. *Naj bo E Banachova mreža s krepko enoto. Tedaj obstaja do homeomorfizma natančno natanko en povsem nepovezan kompakten prostor K in linearni Rieszov izomorfizem $T : E \rightarrow C(K)$, ki je hkrati homeomorfizem.*

References

- [1] C. D. ALIPRANTIS AND O. BURKINSHAW, *Positive operators*, Springer, (2006).
- [2] B. LAVRIČ, *Delno urejeni vektorski prostori*, DMFA – založništvo, (1995), pp. 1–21.