

Tenzorski račun v mehaniki

Diplomska naloga

Domen Gradišek
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko
Mentor: doc. dr. George Mejak

26. februar 2022

1 Uvod

Diplomska naloga obsega osnove tenzorskega računa v mehaniki. Mehanika je veda, ki se ukvarja z mirovanjem teles in njihovim gibanjem pod vplivom sil. Zajema veliko področij matematike in fizike, jaz pa se bom osredotočil le na nekatere. Začeli bomo z definicijami linearne algebre, nato pa postopoma napredovali do skalarnih, vektorskih in tenzorskih polj ter integralnih izrekov za ta polja, kar bo tudi glavni rezultat tega diplomskega dela.

2 Vektorji

Najprej bomo ponovili snov linearne algebre, ki nam bo prišla prav kasneje. Navedli bomo definicije vektorskega prostora, linearne odvisnosti vektorjev in baze vektorskega prostora. Nato se bomo spomnili še nekaj osnovnih operacij na vektorjih in njihovih lastnosti, kot so skalarni produkt, norma vektorjev, mešani in vektorski produkt.

3 Tenzorji

Sedaj si bomo pogledali, kaj so tenzorji v matematičnem smislu. Najprej jih bomo definirali, nato pa obravnavali nekaj njihovih lastnosti. V mislih imejmo dejstvo, da poznamo tenzorje različnih redov. Tenzorji ničtega reda so kar skalarji, tenzorji prvega reda pa vektorji. Mi se bomo ukvarjali le s tenzorji drugega reda, zato bo beseda tenzor v nadaljevanju dela pomenila tenzor drugega reda.

3.1 Tenzorji kot linearne preslikave

Definicija 1 *Tenzor* A je linearna preslikava iz vektorskega prostora $\mathbb{V}$ nazaj vase. Linearnost tenzorja A lahko karakteriziramo z naslednjima dvema pogojevma:

1. $A(x + y) = Ax + Ay$ za vsaka $x, y \in \mathbb{V}$,
2. $A(\alpha x) = \alpha(Ax)$ za vsak $x \in \mathbb{V}$ in vsak $\alpha \in \mathbb{R}$.

Množico vseh tenzorjev, ki slikajo iz vektorskega prostora nazaj vase, označimo z $\mathcal{L}(\mathbb{V})$. V množico $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ vpeljemo seštevanje in množenje s skalarjem na sledeč način:

- $(A + B)x = Ax + Bx$ za vsaka $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ in za vsak $x \in \mathbb{V}$,

- $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$ za vse $A \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, $x \in \mathbb{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Označimo še ničelni tenzor O , za katerega velja $Ox = 0$ za vsak $x \in \mathbb{V}$. Ni se težko prepričati, da velja naslednja trditev (to smo storili že v prvem letniku).

Trditev 1 *Množica $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ skupaj s seštevanjem in množenjem s skalarjem je vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$.*

Lema 1 *Za vsako matriko A iz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ obstajajo enolično določeni skalarji I_A , II_A in III_A , da velja:*

- $[Ax, y, z] + [x, Ay, z] + [x, y, Az] = I_A[x, y, z]$ za vse linearno neodvisne $x, y, z \in \mathbb{R}^3$,
- $[x, Ay, Az] + [Ax, y, Az] + [Ax, Ay, z] = II_A[x, y, z]$ za vse linearno neodvisne $x, y, z \in \mathbb{R}^3$,
- $[Ax, Ay, Az] = III_A[x, y, z]$ za vse linearno neodvisne $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.

Definicija 2 *Skalarje I_A , II_A in III_A imenujemo **glavne invariante** tenzorja A . I_A pravimo tudi **sled** tenzorja, pišemo $\text{tr}A$, III_A pa pravimo **determinanta** tenzorja A , pišemo $\det A$.*

3.2 Operacije na tenzorjih

Najosnovnejši operaciji na tenzorjih sta komponiranje in transponiranje, zato si bomo njuni definiciji ogledali najprej.

Definicija 3 *Naj bosta A in B poljubna tenzorja iz prostora $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Njun **kompozitum** AB definiramo na sledeč način:*

$$(AB)x = A(Bx) \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}^3.$$

Definicija 4 *Za vsak tenzor A iz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ obstaja enolično določen tenzor $A^\top$, da velja:*

$$x \cdot (A^\top y) = y \cdot (Ax) \text{ za vsaka } x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Tenzorju $A^\top$ pravimo **transpozicija** tenzorja A .

Definicija 5 *Če za tenzor A iz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ velja $A = -A^\top$, tenzorju A pravimo **poševno simetrični tenzor**.*

Lema 2 Za vsak poševno simetrični tenzor A iz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ obstaja vektor w iz $\mathbb{R}^3$, da za vsak vektor a iz $\mathbb{R}^3$ velja

$$Aa = w \times a.$$

Vektorju w pravimo **osni vektor** poševno simetričnega tenzorja A .

Naslednja operacija je tenzorski produkt. Ta nam pomaga pri tvorjenju tenzorjev iz vektorjev.

Definicija 6 Tenzorski produkt vektorjev a in b iz $\mathbb{R}^3$ je tenzor, podan s predpisom:

$$(a \otimes b)x = (x \cdot b)a \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}^3.$$

Naslednja trditev bo povzela nekatere malo manj očitne lastnosti tenzorskega produkta.

Trditev 2 Naj bodo a, b, c in d poljubni vektorji iz $\mathbb{R}^3$ in A poljuben tenzor iz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Veljajo sledeče enakosti:

1. $(a \otimes b)(c \otimes d) = (b \cdot c)(a \otimes d),$
2. $A(a \otimes b) = (Aa) \otimes b,$
3. $(a \otimes b)A = a \otimes (A^\top b).$

Naslednji izrek nam pove, kako nam tenzorski produkt pomaga tudi pri predstavitvi tenzorjev.

Izrek 1 Naj bosta $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$ in A poljuben tenzor iz prostora $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Potem obstajajo skalarji A_{pq} , da lahko tenzor A zapišemo v obliki:

$$A = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 A_{pq} e_p \otimes e_q.$$

4 Skalarna, vektorska in tenzorska polja

V nadaljevanju bomo definirali in si ogledali nekatere lastnosti skalarnih, tenzorskih in vektorskih polj. Začnimo z definicijami.

Definicija 7 Naj bo D odprto povezano območje pod $\mathbb{R}^3$.

- Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se imenuje **skalarno polje**.
- Preslikava $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ se imenuje **vektorsko polje**.
- Preslikava $T : D \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ se imenuje **tenzorsko polje**.

4.1 Zveznost in odvedljivost skalarnih, vektorskih in tenzorskih polj

Definicija 8 Naj bosta f skalarno polje, definirano na domeni D in točka x element domene.

- Skalarno polje f je **zvezno** v točki x , če za vsak a iz $\mathbb{R}^3$ velja $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |f(x + \alpha a) - f(x)| = 0$. Skalarno polje je zvezno na domeni D , če je zvezno v vsaki točki.
- Skalarno polje f je **odvedljivo** na domeni D , če obstaja vektorsko polje w definirano na D tako, da za vsak x iz D in a iz $\mathbb{R}^3$ velja $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |w(x) \cdot a - \frac{f(x + \alpha a) - f(x)}{\alpha}| = 0$.

Zveznost in odvedljivost vektorskih in tenzorskih polj definiramo s pomočjo odvedljivosti in zveznosti skalarnih polj na sledeč način.

Definicija 9 Naj bosta F vektorsko in T tenzorsko polje na domeni D ter a in b poljubna vektorja iz $\mathbb{R}^3$.

- Vektorsko polje F je zvezno, če je zvezno skalarno polje $F \cdot a$, in diferenciable, če je skalarno polje $F \cdot a$ odvedljivo.
- Tenzorsko polje je zvezno, če je zvezno skalarno polje $a \cdot (Tb)$, in diferenciable, če je skalarno polje $a \cdot (Tb)$ odvedljivo.

4.2 Gradient, divergenca in rotor

Brez dokaza privzemimo, da je vektorsko polje w iz definicije odvedljivosti skalarnega polja enolično določeno. Od tod bo sledilo, da je naslednja definicija dobra.

Definicija 10 Vektorsko polje $w(x)$ iz definicije odvedljivosti skalarnega polja se imenuje **gradient skalarnega polja** f . Oznaka: $w = \text{grad } f$.

S pomočjo gradienta skalarnega polja lahko definiramo tudi gradient, divergenca in rotor vektorskega polja F .

Definicija 11 Naj bosta F diferenciable vektorsko polje, definirano na domeni D in a poljuben vektor iz $\mathbb{R}^3$.

- **Gradient vektorskega polja** F je tenzorsko polje, definirano na sledeč način: $((\text{grad } F)(x))^T a = \text{grad}(F(x) \cdot a)$.

- **Divergenca vektorskega polja** F je skalarno polje, definirano kot:
 $(\operatorname{div} F)(x) = \operatorname{tr}((\operatorname{grad} F)(x))$.
- **Rotor vektorskega polja** F je vektorsko polje, definirano z: $((\operatorname{rot} F)(x)) \cdot a = \operatorname{div}(F(x) \times a)$.

Na podoben način lahko definiramo tudi divergenco tenzorskega polja.

Definicija 12 Naj bosta T diferenciable tenzorsko polje, definirano na domeni D in a poljuben vektor iz $\mathbb{R}^3$. **Divergenca tenzorskega polja** T je vektorsko polje, definirano z $((\operatorname{div} T)(x)) \cdot a = \operatorname{div}(T(x)a)$.

5 Integralski izreki

V zadnjem poglavju nas bodo zanimali integralski izreki za tenzorska polja. Zadnji izmed treh izrekov je kar navaden Stokesov izrek, ki smo ga dokazali že pri Analizi.

V nadaljevanju naj bo D povezano območje pod $\mathbb{R}^3$ z odsekoma glatkim robom. Rob območja D bomo označevali z ∂D in privzeli, da je orientabilen.

Izrek 2 Naj bosta D območje z odsekoma glatkim robom ∂D in n zunanja enotska normala. Naj bosta F vektorsko in T tenzorsko polje, obe zvezni na D in zvezno odvedljivi na notranjosti D . Potem velja:

$$\int_{\partial D} F \otimes (T^\top n) da = \int_D (F \otimes \operatorname{div} T + (\operatorname{grad} F)T) dV.$$

Izrek 3 Naj bosta D območje z odsekoma glatkim robom ∂D in n zunanja enotska normala. Naj bo T tenzorsko polje, ki je zvezno na D in zvezno odvedljivo na notranjosti D . Potem velja:

$$\int_{\partial D} x \times (T^\top n) da = \int_D (x \times \operatorname{div} T - \tau) dV,$$

kjer je τ osni vektor tenzorja $T - T^\top$ in x vektor iz D .

Izrek 4 Naj bosta Σ ploskev pod $\mathbb{R}^3$, z glatkim robom Γ , in F vektorsko polje, zvezno odvedljivo na neki okolici Σ . Potem velja:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dx = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n da,$$

kjer je n zunanja enotska normala in Γ orientirana pozitivno.

Literatura

- [1] Mikhail Itskov: Tensor algebra and tensor analysis for engineers, 2007.
- [2] I. S. Sokolnikoff: Tensor Analysis - theory and applications to geometry and mechanics of continua, 1964.
- [3] P. Chadwick: Continuum mechanics - Concise theory and problems, 1999, 11-45.