

Variacijski račun in parcialne diferencialne enačbe

Melisa Brulić

Mentor: izr. prof. dr. Pavle Saksida

1 Uvod

Variacijski račun je področje matematike, ki obravnava reševanje optimizacijskih problemov in je tesno povezano s parcialnimi diferencialnimi enačbami. Po eni strani, lahko z reševanjem pripadajoče parcialne diferencialne enačbe, rešimo optimizacijski problem, po drugi, pa je včasih lažje rešiti optimizacijski problem kot dejansko parcialno diferencialno enačbo. V tem primeru se izkaže variacijski račun kot zelo uporabno orodje pri študiju parcialnih diferencialnih enačb.

Videli bomo, da povezava med optimizacijskim problemom in pripadajočo parcialno diferencialno enačbo temelji na predhodni predpostavki, da je rešitev dane parcialne diferencialne enačbe dovolj gladka. Če rešitev ne bo dovolj gladka, bomo spoznali nov pojem t.i. šibke rešitve, za kar bomo potrebovali pojem Hilbertovega prostora.

2 Osnovna naloga variacijskega računa

Pogosto nas zanimajo funkcije, ki minimizirajo kak funkcional. To je podobno kot iskanje ekstremov funkcij na domenah v evklidskem prostoru, samo da imamo sedaj prostor funkcij.

Definicija 2.1. Naj bo D domena v $\mathbb{R}^n$. Naj bo F neka funkcija na $D \times \mathbb{R}^m$. Funkcijo $E : \mathcal{C}^r(D) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$E(u) = \int_D F(x_1, \dots, x_n, L_1(u), \dots, L_m(u)) dx_1 \dots dx_n,$$

kjer so L_i linearni operatorji, imenujemo *Lagrangejev funkcional z jedrom F* .

Zanima nas, kako bi poiskali funkcije u na D s predpisano robno vrednostjo $u|_{\partial D}$, pri katerih E zavzame ekstremno vrednost. Kandidate za ekstreme poiščemo tako, da problem prevedemo na iskanje ekstremov funkcij ene spremenljivke.

Definicija 2.2. $\delta E(u)(\psi) = \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} E(u + \epsilon\psi)$ je *prva variacija* ali *smerni odvod E v točki u v smeri tangentnega vektorja ψ* .

Definicija 2.3. Točka u , v kateri je $\delta E(u) = 0$ za vsak $\psi \in \mathcal{A}$, se imenuje *stacionarna točka funkcionala E* .

Parcialne diferencialne enačbe, ki jih dobimo, ko enačimo prvo variacijo z nič, imenujemo *Euler-Lagrangeve enačbe*.

Lema 2.4 (Osnovni izrek variacijskega računa). *Naj bo u zvezna na $\overline{D}$, tako, da za vse gladke ψ , za katere je $\psi|_{\partial D} = 0$, velja*

$$\int_D u(\vec{x}) \psi(\vec{x}) d\vec{x} = 0.$$

Potem je $u(\vec{x}) = 0$ za vsak $\vec{x} \in D$.

Primer 2.5. Euler-Lagrangeva enačba za funkcional oblike $E(u) = \int_I F(t, u(t), \dot{u}(t))dt$, se glasi

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = 0.$$

□

3 Minimalne ploskve

Eden izmed primerov uporabe variacijskega računa so minimalne ploskve. To so ploskve v prostoru, ki lokalno minimizirajo površino, v smislu, da ima vsak dovolj majhen kos te ploskve najmanjšo površino med vsemi ploskvami z istim robom. Pojavljajo se tudi v naravi. Zakoni fizike namreč implicirajo, da milni mehurčki, dani z robno krivuljo, vedno zavzamejo obliko minimalne ploskve. Poseben primer minimalnih ploskve, so minimalni grafi. To so minimalne ploskve, ki jih je mogoče predstaviti eksplicitno, kot graf funkcije dveh spremenljivk $f = f(x, y)$.

V tem primeru iščemo funkcijo $f \in \mathcal{C}^2(D)$ na kompaktni domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ z odsekom gladkim robom, z dano robno vrednostjo $f|_{\partial D} = u : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, pri kateri ima graf najmanjšo ploščino

$$A(G_f) = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

Euler-Lagrangeva enačba se glasi

$$\left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right)_x + \left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right)_y = 0.$$

To enačbo je izpeljal Lagrange, leta 1760. Je kvazilinerna parcialna diferencialna enačba drugega reda, ki jo imenujemo *Lagrangeva enačba minimalnih grafov*.

4 Funkcijski prostori in šibke formulacije

Denimo, da imamo neko parcialno diferencialno enačbo. Če že takoj na začetku zahtevamo, da so rešitve dovolj gladke (npr. k -krat zvezno odvedljive), jih bo zelo težko najti. Zato je boljša strategija obravnavati obstoj in gladkost oz. regularnost rešitve posebej. Ideja je, da za dano parcialno diferencialno enačbo definiramo splošnejši pojem rešitve. Taka rešitev bi sicer enačbo rešila, a ne bi bila dovoljkrat zvezno odvedljiva. Ker za tako rešitev ne pričakujemo "preveč" od gladkosti, je lažje pokazati, da ta obstaja in, da je enolična. Izkaže se, da lahko take rešitve poiščemo s pomočjo variacijskega računa. Denimo, da lahko pokažemo, da je dana parcialna diferencialna enačba Euler-Lagrangeva enačba nekega funkcionala in recimo, da pokažemo, da ima ta funkcional minimum. Potem ima dana diferencialna enačba rešitev. Te rešitve lahko tudi izračunamo poljubno natančno. Predstavlja bom dve metodi s pomočjo katerih lahko poiščemo rešitve.

Pri tem bomo potrebovali Hilbertove prostore.

4.1 Hilbertovi prostori

Za nas bodo posebno koristni polni funkcijski prostori s skalarnim produktom. Za tak prostor V namreč velja, da vsako zaporedje v V , katerega členi so si infinitezimalno blizu, konvergira h kakšnemu vektorju v V . Te prostore imenujemo Hilbertovi prostori.

Definicija 4.1. *Hilbertov prostor* je poln vektorski prostor s skalarnim produktom.

To je vektorski prostor, opremljen s skalarnim produktom, v katerem je vsako Cauchyovo zaporedje konvergentno. Hilbertovi prostori so poimenovali po nemškem matematiku Davidu Hilbertu (1862-1943).

Iz prostora s skalarnim produktom V , lahko konstruiramo nov prostor, ki vsebuje vse limite Cauchyjevih zaporedij funkcij iz V . To je prostor, ki je poln. Rečemo mu *napolnitev*. Očitno je, da bo tak prostor vseboval V , saj je za vsako $f \in V$ konstantno zaporedje $\{f\}$ Cauchyjevo. Izkaže se, da napolnitev vedno obstaja. Še več, vsak prostor s skalarnim produktom V_I lahko enolično napolnimo v Hilbertov prostor H_I , da je V_I gost v H_I , skalarni produkt $\langle f, g \rangle_{V_I}$ na V_I pa razširimo na skalarni produkt $\langle f, g \rangle_{H_I}$ za elemente H_I , tako da za vsaki funkciji $f, g \in V_I$ velja $\langle f, g \rangle_{V_I} = \langle f, g \rangle_{H_I}$.

Spomnimo se definicije goste množice.

Definicija 4.2. Naj bo W taka množica funkcij v Hilbertovem prostoru H , da za vsako funkcijo $f \in H$ in vsak $\epsilon > 0$, obstaja funkcija $f_\epsilon \in W$, da je $\|f_\epsilon - f\| < \epsilon$. Potem W imenujemo *gosta množica* v H .

Sedaj, ko smo spoznali pojem napolnitve in goste množice, lahko definiramo bazo Hilbertovega prostora.

Definicija 4.3. Množica funkcij B v Hilbertovem prostoru H je *baza prostora* H , če so njeni elementi linearno neodvisni in je množica končnih linearnih kombinacij elementov iz B gosta v H .

Primer 4.4. Zgled Hilbertovega prostora, ki je posebno uporaben v teoriji parcialnih diferencialnih enačb je *prostor Soboljeva*. To je napolnitev prostora zveznih funkcij $\mathcal{C}^1(D)$, opremljenega s skalarnim produktom

$$\langle u, v \rangle = \int_D (uv + \nabla u \cdot \nabla v) d\vec{x}$$

Prostor Soboljeva je poimenovan po ruskem matematiku Sergeju Soboljevu (1908-1989). Označimo ga s $H_1(D)$. Množica vseh zvezno odvedljivih funkcij na D je seveda gosta v $H_1(D)$. $\square$

4.2 Ritzova metoda

Oglejmo si problem minimiziranja funkcionala $G(u)$, kjer je u funkcija Hilbertovega prostora H . Ritzova metoda temelji na izbiri baze B (po možnosti ortonormirane) za H in izražavi neznanega minimuma u v obliki elementov ϕ_n baze B

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n$$

Na ta način smo problem minimiziranja funkcionala prevedli v algebraični problem iskanja koeficientov α_n .

V praksi, lahko uporabimo dejstvo, da je vrsta za u konvergentna in zato pričakujemo, da se koeficienti manjšajo, ko $n \rightarrow \infty$. Tako lahko aproksimiramo vrsto s končno in zapišemo

$$u \approx \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n.$$

4.3 Šibke formulacije in Galerkinova metoda

Sedaj bomo na primeru vpeljali pojem šibke formulacije in šibke rešitve ter predstavili Galerkinovo metodo.

Oglejmo si naslednjo parcialno diferencialno enačbo.

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= -f & \vec{x} \in D \\ u &= 0 & \vec{x} \in \partial D, \end{aligned}$$

kjer je f dana funkcija na domeni $D \in \mathbb{R}^2$.

Naj bo $\psi \in H_1(D)$ testna funkcija. Če pomnožimo obe strani s testno funkcijo ψ in integriramo po delih, dobimo

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \psi d\vec{x} = \int_D f \psi d\vec{x}.$$

Vidimo, da je ta oblika enačbe bolj splošna, njene rešitve morajo biti samo enkrat zvezno odvedljive, medtem ko morajo biti rešitve prvotne enačbe dvakrat zvezno odvedljive. To obliko parcialne diferencialne enačbe imenujemo *šibka formulacija*, rešitve šibke formulacije pa *šibke rešitve*.

Zgornjo šibko formulacijo lahko zapišemo tudi v obliki $\langle u, \psi \rangle_{H_1(D)} = \int_D f \psi d\vec{x}$. Izkaže se, da ima natanko eno rešitev u^* . Še več, u^* je minimum funkcionala

$$Y(u) = \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} u^2 + f u \right) du.$$

S pomočjo Galerkinove metode lahko konstruiramo rešitev šibke formulacije na naslednji način. Izberemo verigo Hilbertovih podprostorov $H_1, H_2, \dots, H_k \dots$ prostora $H_1(D)$, da velja

1. $H_k \subset H_{k+1}$,
2. $\dim H_k = k$,
3. unija teh podprostorov je celoten $H_1(D)$.

To pomeni, da obstaja taka baza ϕ_k prostora $H_1(D)$, da je $\phi_k \in H^{(k)}$. V vsakem podprostoru $H^{(k)}$ lahko izberemo bazo $\phi_1^k, \dots, \phi_k^k$ in zapišemo šibko formulacijo v prostoru H^k

$$\langle v^k, \phi_i^k \rangle_{H_1(D)} = \int_D f \phi_i^k d\vec{x} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Neznane funkcije v^k lahko razvijemo po bazi: $v^k = \sum_{j=1}^k \alpha_j^k \phi_j^k$. Tako dobimo za neznane koeficiente $\alpha_1^k, \dots, \alpha_k^k$ naslednje algebraične enačbe

$$\sum_{j=1}^k K_{ij}^k \alpha_j^k = d_i \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

kjer je $K_{ij} = \langle \phi_i^k, \phi_j^k \rangle_{H_1(D)}$ in $d_i = \int_D f \phi_i^k d\vec{x}$. Ta metoda je poimenovana po ruskem inženirju Borisu Galerkinu (1871-1945).

4.3.1 Lax-Milgramov izrek

Šibke formulacije lahko predstavimo še bolj splošno. Naj bo V Hilbertov prostor in V' njegov dualni prostor. Želimo najti rešitev u v V enačbe $Au = f$, kjer je $A : V \rightarrow V'$ in $f \in V'$. To je ekvivalentno iskanju $u \in V$, tako da za vse $v \in V$ velja $(Au)(v) = f(v)$. Funkciji v rečemo testna funkcija.

To preuredimo v naslednjo formulacijo problema, ki ji rečemo *šibka formulacija*: Najdi tak $v \in V$, da je

$$a(u, v) = f(v)$$

za vse $v \in V$, kjer je $a(u, v) = (Au)(v)$ bilinearna forma.

Obstaja izrek, ki za nekatere bilinearne forme zagotovi enolično rešitev šibke formulacije. To je Lax Milgramov izrek.

Izrek 4.5 (Lax-Milgram). *Naj bo V Hilbertov prostor in $a(\cdot, \cdot)$ bilinearna forma na V , za katero obstajata taki konstanti $\alpha, \beta > 0$, da je*

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\| \quad \text{za vse } u, v \in V$$

in

$$\beta \|u\|^2 \leq a(u, u) \quad \text{za vse } u \in V$$

Potem za vse $f \in V'$ obstaja enolična rešitev $u \in V$ enačbe $a(u, v) = f(v)$ za vsak $v \in V$.

Če je bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ simetrična in pozitivna, pa lahko šibko formulacijo interpretiramo kot optimizacijski problem iskanja minimuma.

Izrek 4.6. *Naj bo V Hilbertov prostor in $a \in \mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$ in $f \in V'$. Denimo, da je bilinearna forma $a(\cdot, \cdot)$ simetrična in pozitivna:*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \text{za vse } u, v \in V$$

in

$$a(u, u) \geq 0 \quad \text{za vse } u \in V.$$

Potem je u rešitev šibke formulacije natanko tedaj, ko za vsak $v \in V$ funkcija u minimizira na funkcional

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$$

na V t.j. $J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$.

Literatura

- [1] L. C. Evans, *Partial differential equations*, 2nd ed., American Mathematical Society Providence, 2010, dostopno tudi na: <http://home.ustc.edu.cn/~xushijie/pdf/textbooks/pde-evans.pdf>.
- [2] F. Forstnerič, *Minimal surfaces for undergraduates*, 2020, dostopno na: <https://www.fmf.uni-lj.si/~forstneric/papers/2020MSundergraduates.pdf>.
- [3] Y. Pinchover, J. Rubinstein, *An Introduction to partial differential equations*, Cambridge University Press, 2005.
- [4] *Weak formulation of elliptic problems*, Laboratoire Jacques - Louis Lions, France, dostopno na https://www.ljll.math.upmc.fr/frey/cours/UdC/ma691/ma691_ch4.pdf.