

Kvantne vozalne invariante

Jernej Grlj
Mentor: Sašo Strle

Februar 2022

1 Zgodovina

Leta 1923 je J. W. Alexander odkril prvi vozelní polinom, ki ga dandanes poznamo kot Alexandrov polinom. Leta 1926 oz. 1927 so K. Reidemeister in vzporedno J. W. Alexander ter G. B. Briggs, odkrili kombinatorično, planarno formulacijo pojma vozla, ki temelji na Reidemeistrovih potezah.

Do konca stoletja se področje teorije vozlov ni veliko razvilo, veljalo je prepričanje, da je Alexandrov polinom edina takšna invarianta. Leta 1984 je V. Jones presenetil z odkritjem Jonesovega polinoma. Nadaljnji razvoj področja je potekal zelo hitro in Witten, Reshetikhin ter Tuarev so leta 1991 odkrili celo družino kvantnih vozelnih invariant, ki prihajajo iz teorije Liejevih algeber. Izkazalo se je, da sta Jonesov in Alexandrov polinom posebna primera teh invariant.

Več o kvantnih invariantah si bomo pogledali v nadaljevanju. Sledili bomo formulaciji kvantnih vozelnih invariant R. v. d. Veenaa [1].

2 Hopfove algebre

Najprej bomo definirali Hopfovo algebro, saj take algebre igrajo pomembno vlogo v teoriji kvantnih invariant.

V nadaljevanju naj K označuje polje.

Definicija 2.1. Algebra H nad K je struktura (H, ∇, η) , da velja; H je vektorski prostor nad K , s K -linearnim množenjem $\nabla : H \otimes H \rightarrow H$ in enoto $\eta : K \rightarrow H$. Zahtevamo, da je množenje asociativno; $\nabla \circ (\nabla \otimes id_H) = \nabla \circ (id_H \otimes \nabla)$ in da enota ustreza pogoju $id_H = \nabla \circ (\eta \otimes id_H) = \nabla \circ (id_H \otimes \eta)$.

Ta definicija ustreza definiciji algebre, ki jo poznamo. Natančneje, naj bo H algebra nad K z množenjem $*$ in enoto za množenje 1. Naj bodo m_1, m_2, m_3 elementi H . Za množenje v smislu gornje definicije vzamemo $\nabla(m_1 \otimes m_2) = m_1 * m_2$. Opazimo, da zahteva po asociativnosti $*$ ravno ustreza zahtevi po asociativnosti iz gornje definicije:

$$\begin{aligned} \nabla \circ (\nabla \otimes id_H)(m_1 \otimes m_2 \otimes m_3) &= \nabla((m_1 * m_2) \otimes m_3) \\ &= (m_1 * m_2) * m_3 = m_1 * (m_2 * m_3) \\ &= \nabla(m_1 \otimes (m_2 * m_3)) = \nabla \circ (id_H \otimes \nabla)(m_1 \otimes m_2 \otimes m_3) \end{aligned}$$

Podobno vidimo $\eta(k) = k * 1$ za $k \in K$.

Pogoja iz zgornje definicije sta ekvivalentna komutativnosti spodnjih diagramov (v desnem diagramu upoštevamo $H = H \otimes K = K \otimes H$ – tu izomorfizem pišemo z enačajem, ker gre za naravni izomorfizem).

$$\begin{array}{ccc}
H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{\nabla \otimes id_H} & H \otimes H \\
\downarrow id_H \otimes \nabla & & \downarrow \nabla \\
H \otimes H & \xrightarrow{\nabla} & H
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
H & \xrightarrow{\eta \otimes id_H} & H \otimes H \\
\downarrow id_H \otimes \eta & & \downarrow \nabla \\
H \otimes H & \xrightarrow{\nabla} & H
\end{array}$$

Oglejmo si definicijo koalgebre. Ime izhaja iz tega, da dobimo konstrukcijo koalgebre tako, da obrnemo puščice v zgornjih dveh diagramih.

Definicija 2.2. *Koalgebra* H nad K je K -vektorski prostor skupaj s K -linearnima komnoženjem $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$, ki ustreza koasociativnosti; $(id_H \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id_H) \circ \Delta$, in koenoto $\epsilon : H \rightarrow K$, ki ustreza $id_H = (id_H \otimes \epsilon) \circ \Delta = (\epsilon \otimes id_H) \circ \Delta$. Koalgebro označimo kot (H, Δ, ϵ) .

Sedaj lahko definiramo bialgebro, ki je hkrati algebra in koalgebra.

Definicija 2.3. *Bialgebra* H nad K je K -vektorski prostor skupaj s preslikavami Δ, ∇, ϵ in η , tako da je (H, ∇, η) algebra in (H, Δ, ϵ) koalgebra. Dodatno zahtevamo $id_H = \epsilon \circ \eta$ in komutativnost naslednjih diagramov (tukaj je $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$):

$$\begin{array}{ccc}
H \otimes H & \xrightarrow{\nabla} & H \xrightarrow{\Delta} H \otimes H \\
\downarrow \Delta \otimes \Delta & & \uparrow \nabla \otimes \nabla \\
H \otimes H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{id_H \otimes \tau \otimes id_H} & H \otimes H \otimes H \otimes H
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
H \otimes H & \xrightarrow{\nabla} & H \\
\downarrow \epsilon \otimes \epsilon & & \downarrow \epsilon \\
K \otimes K = K & & K \\
\uparrow \eta \otimes \eta & & \uparrow \eta \\
H \otimes H & \xleftarrow{\Delta} & H
\end{array}$$

Bialgebro označimo kot $(H, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon)$.

Definicija 2.4. Bialgebra $(H, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon)$ je *Hopfova algebra*, če obstaja taka K -linearna preslikava $S : H \rightarrow H$, ki jo imenujemo antipod, da spodnji diagram komutira:

$$\begin{array}{ccccc}
& & H \otimes H & \xrightarrow{S \otimes id_H} & H \otimes H \\
& \nearrow \Delta & & & \searrow \nabla \\
H & \xrightarrow{\epsilon} & K & \xrightarrow{\eta} & H \\
& \searrow \Delta & & & \nearrow \nabla \\
& & H \otimes H & \xrightarrow{id_H \otimes S} & H \otimes H
\end{array}$$

Hopfovo algebro označimo s $(H, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon, S)$.

V matematiki se pojavi veliko Hopfovih algeber. Poglejmo si konstrukcijo cele družine primerov.

Zgled 2.5. Za vektorski prostor V nad K definiramo $T^k V = V^{\otimes k} = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$. Tenzorska algebra V je tedaj $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k V$. Tenzorska algebra je res algebra z množenjem $\nabla : T^k V \otimes T^l V \rightarrow T^{k+l} V$, množenje je kar tenzorski produkt elementov, razširjen linearno na tenzorsko algebro

$T(V)$. Enota je vložitev K v prvi faktor vsote (po definiciji je $T^0 = K$); $\eta : k \mapsto k$ za vsak $k \in K$. Koprodukt definiramo kot $\Delta : v \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$ za $v \in V$ in $\Delta : 1 \mapsto 1 \otimes 1$ za enoto $1 \in K$. Nato lahko ta predpis linearno razširimo na K in $T(V)$. Koenota ϵ vse elemente iz $T^k(V)$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ slika v 0, za $k \in K$ pa velja $\epsilon : k \mapsto k$. Z direktnim računom lahko preverimo, da $T(V)$ z zgornjimi operacijami postane koalgebra. Če definiramo antipod $S(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = (-1)^n v_n \otimes \cdots \otimes v_1$, postane $(T(V), \nabla, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ Hopfova algebra. Tako smo za vsak vektorski prostor definirali pripadajočo Hopfovo algebro.

3 Prepleti

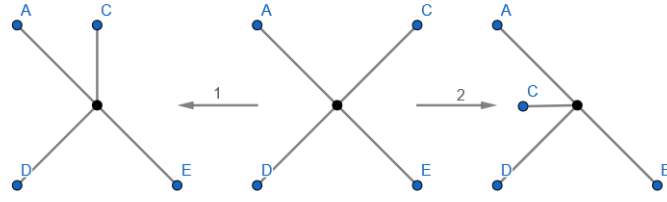
V tem razdelku bomo vpeljali ustrezno definicijo vozlov. Vozle bomo definirali s pomočjo t. i. *rv*-prepletov (oznaka stoji za rotacijski, virtualen preplet).

Najprej potrebujemo pomožno definicijo *rv*-pentljastih grafov. Vozlišča stopnje ena bomo imenovali konci (grafa), ostala vozlišča pa notranja vozlišča (grafa).

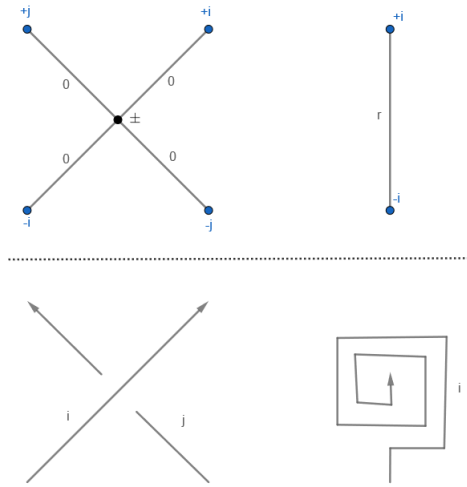
Definicija 3.1. Graf G , ki ima na vsakem oglišču, do rotacij natančno, predpisano zaporedno oštevilčenje povezav, ki vsebujejo to oglišče, se imenuje *pentljast graf*. Graf G je *rv-pentljast graf*, če je pentljast graf in ima dodatno vsako vozlišče in povezavo označeno s celim številom, tako da oznake koncev grafa nastopajo v parih, kjer ima eno vozlišče vrednost $+i$, drugo pa $-i$, za $i \in \mathbb{N}$. Notranja vozlišča pa imajo oznako 1 ali -1 . Z I_G označimo množico, ki vsebuje absolutne vrednosti vseh oznak koncev grafa.

Na diagramih pentljastih grafov ne bomo označevali oštevilčenja povezav okrog vozlišč. Mislimo si, da izberemo zaporedje v obratni smeri urinega kazalca (glede na definicijo so vsa taka oštevilčenja enaka in je vseeno pri kateri povezavi začnemo). Na grafe bomo gledali kot na konkretne diagrame in v mislih imamo, da pri transformacijah diagramov pentljastih grafov ne moremo premakniti ene izmed povezav »mimo« (pod ali nad) druge povezave – na ta način poskrbimo, da se ciklično oštevilčenje ohranja. Glede na spodnjo sliko lahko v pentljastem grafu naredimo premik označen z 1, ne pa tudi tistega označenega z 2. Konce grafa smo označili z modro barvo, notranja vozlišča pa s črno.

Zgled 3.2. Oglejmo si dve ilustraciji, ki predstavljata osnovna *rv*-pentljasta grafa. Pod črtkano črto je označen način, kako lahko osnovna *rv*-pentljasta grafa interpretiramo kot prepleta (oziroma sestavna dela vozla), pri $\pm = +$ in $r = 2$. Levi graf bomo označevali z $X_{ij}^\pm$, desnega pa z α_i^r .



Slika 1: Samo transformacija 1 ohranja oštevilčenje okrog vozlišča.



Slika 2: Osnovna *rv*-pentljusta grafa.

Preden lahko govorimo o vozlih, moramo definirati dve operaciji na *rv*-pentljustih grafih.

Definicija 3.3. Naj bo G *rv*-pentljusti graf. Za $i, j \in I_G$ in $k \notin I_G$ definiramo nov *rv*-pentljust graf $m_k^{ij}(G)$ tako, da v G povežemo konca, ki sta označena z $-j$ in i (ter ju iz grafa odstranimo), tako nastalo povezavo pa označimo z vsoto oznak povezav, ki smo ju združili. Konca $-i$ in j nato označimo z $-k$ in k oziroma. Temu postopku rečemo *množenje*.

Če imamo dva *rv*-pentljusta grafa H in G , ki imata vse oznake koncev različne, definiramo *rv*-pentljust graf $G \sqcup H$ kot disjunktno unijo H in G .

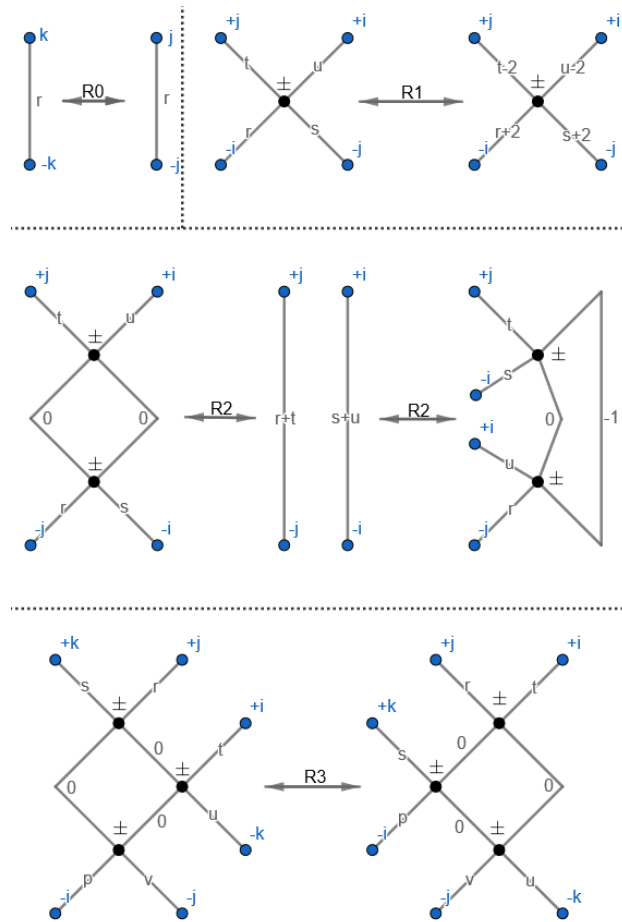
Izpostaviti velja, da pri množenju ne ustvarimo novih vozlišč. Sedaj lahko definiramo *rv*-preplet in *rv*-vozel.

Definicija 3.4. *Rv*-pentljust graf imenujemo *rv-preplet*, če je sestavljen iz končno mnogo osnovnih *rv*-pentljustih grafov oblike $X_{ij}^\pm$ in α_i^r , kjer so $i, j, r \in$

$\mathbb{Z}$, z uporabo disjunktnih unij in množenj na tak način, da na koncu nobena dva para koncev nimata iste oznake.

Za enake proglasimo *rv*-preplete, ki so v istem ekvivalenčnem razredu glede na Reidemeistrove premike $R1, R2, R3$, ki so predstavljeni na sliki 3, in $R0$, ki označuje spremembo oznak na paru koncev (nova oznaka še ne nastopa v preostanku *rv*-preleta).

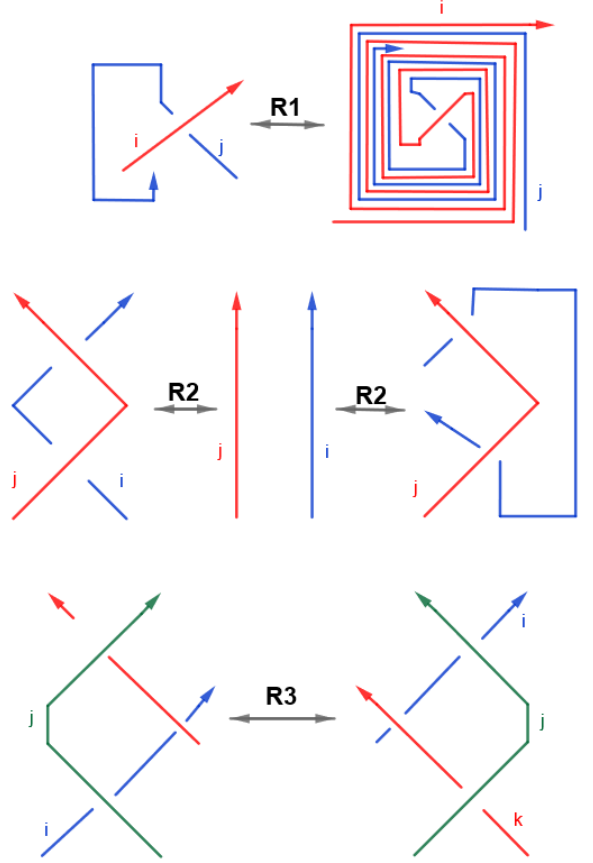
Rv-vozel je *rv*-preplet s samo enim parom koncev.



Slika 3: Reidemeistrovi premiki za *rv*-preplete.

Rv-preplete iz gornje slike lahko interpretiramo, kot smo to storili na sliki 2. Če vsem notranjim ogliščem predpišemo oznako $+1$, vsem povezavam pa oznako 0 (izjema je povezava med notranjim ogliščem in koncem z oznako $+j$ pri $R1$ – tej povezavi smo predpisali oznako $+1$), dobimo spodnjo sliko. Če poznamo Reidemeistrove premike za preplete iz klasične teorije vozlov, opazimo nekaj podobnosti med njimi in spodnjimi prepleti. Povezave, ki

pripadajo koncema z oznakama $\pm n$ za $n \in \mathbb{N}$, so na sliki pobarvane z isto barvo.



Slika 4: Interpretacija Reidemeistrovih premikov za rv -preplete.

Videli smo že, kako definiramo množenje na rv -prepletih. Množenje z α_i^0 (pod pogojem, da se i ne pojavlja v preostanku rv -prepleta) nam da enak rv -preplet. Množenje nas spominja na množenje v algebri, vendar lahko operacijo množenja izvajamo tudi na enem rv -prepletu, torej ni množenje v smislu algebre.

Izkaže pa se, da lahko na tenzorskih produktih Hopfove algebre same s sabo definiramo množenje s pomočjo množenja, ki ga imamo v Hopfovi algebri, na skoraj enak način kot smo definirali množenje na rv -prepletih. Podobno lahko naredimo za komnoženje in antipod (več o tem v [1], na straneh od 5 do 8, ali v [2]). Nato lahko, z ustrezno preslikavo iz množice rv -prepletov v tenzorski produkt Hopfove algebre, dobimo vozelo invarianto. Podrobnosti so v [1] ali [3].

Literatura

- [1] Ronald van der Veen, *Introduction to quantum invariants of knots*, https://www.matrix-inst.org.au/wp_Matrix2016/wp-content/uploads/2017/08/vdVeen.pdf (8. 2017), dostopano 26. 9. 2021.
- [2] Dror Bar-Natan, Roland van der Veen, *Universal tangle invariants and docile perturbed Gaussians*, <http://drorbn.net/AcademicPensieve/People/VanDerVeen/DoPeGD0%20Writeup/DoPeGD0190904@.pdf> (4. 9. 2019), dostopano 28. 2. 2022.
- [3] Christian Kassel, Marc Rosso, Vladimir Turaev, *Quantum Groups and Knot Invariants*, Société mathématique de France, Francija, 1997.
- [4] Vyjayanthi Chari, Andrew N. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer, New York ; Heidelberg ; Berlin, 1972.
- [6] Sorin Dascalescu, Constantin Nastasescu, Serban Raianu, *Hopf Algebra: An Introduction*, CRC Press, ZDA, 2000.