

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Meta Trdin

**Cayleyjev graf končnega kolobarja**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. David Dolžan

Ljubljana, 2022

## KAZALO

|                                        |   |
|----------------------------------------|---|
| 1. Uvod                                | 4 |
| 2. Osnovne algebraične lastnosti       | 4 |
| 3. Sosedni vozlišč v Cayleyjevem grafu | 7 |
| 4. Premer in ožina grafa               | 7 |
| 5. Povezanost in barvnost              | 7 |
| 6. Ravninskost                         | 7 |
| 7. Lastne vrednosti                    | 7 |
| Slovar strokovnih izrazov              | 7 |
| Literatura                             | 7 |

# Cayleyjev graf končnega kolobarja

POVZETEK

# Unitary Cayley graph of a finite ring

ABSTRACT

Math. Subj. Class. (2020):

Ključne besede:

Keywords:

## 1. UVOD

Naj bo  $K$  končen komutativen kolobar z enico  $1 \neq 0$ . Cayleyjev graf končnega kolobarja  $K$  je graf, kjer so vozlišča vsi elementi kolobarja  $K$ . Vozlišči  $a$  in  $b$  sta povezani, če je  $a - b$  obrnljiv element, torej če je  $a - b \in K^*$ . Naj bo  $n \in \mathbb{N}$ . Povod za študijo Cayleyjevih grafov končnega kolobarja, je bil Cayleyjev graf kolobarja  $\mathbb{Z}_n$  in njihovi avtomorfizmi, kjer so za vozlišča vzeli elemente  $\mathbb{Z}_n$  in povezanost definirali kot: elementa  $a$  in  $b \in \mathbb{Z}_n$  sta sosedna, če je  $a - b$  obrnljiv element tega kolobarja. Potem pa so problem posplošili na končne kolobarje. Ena od stvari, ki jih še raziskujejo pri tem je kdaj se lahko dani graf pojavi kot inducirani podgraf v Cayleyevu grafu  $\mathbb{Z}_n$ , vendar nas to tukaj ne bo zanimalo.

Zavedati se moramo, da obstaja več definicij Cayleyevih grafov nad kolobarjem za katere dobimo različne rezultate. Pri eni izmed njih sta elementa  $a$  in  $b$  sosedna, če je  $a - b$  delitelj nič.

Cayleyjeve grafe obravnavamo tudi nad grupami. Tudi tu obstaja več različnih definicij. Mi si bomo pogledali naslednjo. Naj bo  $G$  grupa in  $S$  poljubna podmnožica  $G$ . Cayleyjev graf  $\text{Cay}(G, S)$  je usmerjen graf s točkami iz  $G$  in povezavo od  $a$  do  $b$ , če  $ab^{-1} \in S$ . Ker so kolobarji tudi grupe za seštevanje, lahko vzamemo kolobar  $K$  namesto grupe  $G$  in množico vseh obrnljivih elementov  $K^*$  namesto  $S$  in dobimo isto definicijo. V tem primeru graf ni več usmerjen, saj je  $a - b = c \in K^*$  natanko takrat, ko je  $b - a = -c \in K^*$ .

## 2. OSNOVNE ALGEBRAIČNE LASTNOSTI

V tem poglavju bomo uvedli nekaj novih pojmov in povedali osnovne algebraične lastnosti. Obravnavali bomo kako izgleda Cayleyev graf, če študiramo različne kolobarje. Preden se tega lotimo, moramo definirati lokalnost in zatem trditev, ki je posledica lokalnosti ter jo bomo v nadaljevanju potrebovali.

**Definicija 2.1.** Pravimo, da je komutativen kolobar lokalni, če vsebuje natanko en maksimalni ideal.

**Trditev 2.2.** Naj bo  $K$  končen lokalni kolobar z maksimalnim idealom  $I$ . Potem je  $I$  enak množici vseh neobrnjljivih elementov kolobarja  $K$  oziroma v  $K \setminus I$  so samo obrnljivi elementi.

*Dokaz.* Naj bo  $X$  množica vseh neobrnjljivih elementov kolobarja  $K$ . Dokazujemo, da je  $X = I$ , tj.  $X$  je maksimalni ideal. Spomnimo se, da je  $X$  ideal natanko takrat, ko je  $X$  podgrupa za seštevanje in velja  $KX \subseteq X$  ter  $XK \subseteq X$ . Naj bosta  $a$  in  $b \in X$ . Hočemo dokazati, da je element  $a - b \in X$ . Poglejmo si ideal  $I_a$  generiran z  $a$  in razmislimo, da je ta ideal podmnožica maksimalnega ideala  $I$ . Recimo, da obstaja element  $c \in I_a \setminus I$ . Če obstaja maksimalni ideal, ki vsebuje  $I_a$ , je to v protislovju s prespostavko, da je naš kolobar lokalni. Če pa tak ideal ne obstaja, je potem  $I_a$  že maksimalni, kar spet vodi v protislovje. Zato je  $I_a \subset I$ . Sledi, da je  $a \in I$ . Podobno ugotovimo, da je tudi  $b \in I$ . Ker je  $I$  po definiciji podgrupa, je tudi  $a - b \in I$ . Tako dobimo, da je element  $a - b$  neobrnjljiv, saj če bi ideal  $I$  vseboval kakšen obrnljiv element, bi bil enak celemu kolobarju, vendar  $I$  ne more biti enak  $K$ , saj je maksimalni. Zato je  $a - b \in X$ . Torej je  $X$  podgrupa za seštevanje.

Dokažimo zdaj, da je  $KX \subseteq X$ . Vzemimo  $x \in X$  in naj bo  $m \in K$  obrnljiv. Dokazati moramo, da je element  $mx$  neobrnjljiv. Pa naj bo  $mx = n$  obrnljiv element. Dobljeno enačbo nato pomnožimo z  $m^{-1}$  z leve in dobimo  $x = m^{-1}n$ . To pa je obrnljiv element z inverzom  $n^{-1}m$ . Prišli smo v protislovje, zato je  $mx$  res neobrnjljiv

in iz  $X$ . Naj bo zdaj  $m \in K$  neobrnljiv. Če bi bil produkt  $mx$  obrnljiv, bi obstajal element  $c \in K$ , da bi veljalo  $mx = 1$ , kar pa pomeni, da smo našli tudi inverz  $m$ . Spet dobimo protislovje, torej je  $mx \in X$ . Podobno razmislimo tudi za  $XK \subseteq X$ . Množica  $X$  je torej res ideal. Je tudi maksimalen, saj so zunaj  $X$  sami obrnljivi elementi. Ker je  $K$  lokalni, je zato  $X = I$ .  $\square$

Poglejmo si, kakšne bi lahko bile ekvivalentne definicije sosednosti dveh vozlišč v primeru lokalnega kolobarja. Naj bo  $K$  lokalni kolobar,  $I$  maksimalni ideal in naj bosta  $a, b \in K$  sosedna. Po definiciji to pomeni, da je  $a - b$  obrnljiv element. Ker pa so v  $K \setminus I$  natanko obrnljivi elementi, je torej razlika  $a - b \notin I$ . Zdaj se spomnimo, da je  $K/I = \{a + I \mid a \in K\}$  kvocientni kolobar in  $\pi : K \rightarrow K/I$  kanonični epimorfizem s predpisom  $\pi(a) = a + I$ . Izraz  $a - b \notin I$  je ekvivalenten  $a + I \neq b + I$ , kar je po definiciji preslikave  $\pi$  enako  $\pi(a) \neq \pi(b)$ . Torej sta  $a$  in  $b$  sosedna natanko takrat, ko nista v istem ekvivalenčnem razredu.

**Primer 2.3.** Poglejmo si graf  $G_{\mathbb{Z}_4}$ . Kolobar  $\mathbb{Z}_4$  je res lokalni z maksimalnim idealom  $I = \{0, 2\}$ . Obrnljiva elementa sta 1 in 3, neobrnljiva pa 0 in 2. Ustrezno povežemo. Množici  $I$  in  $\{1, 3\}$  sta edina ekvivalenčna razreda  $\mathbb{Z}_4/I$ . Res vidimo, da so sosedni natanko tisti elementi, ki niso v istem razredu.  $\diamond$

Iz zgornjega razmisleka dobimo naslednji dve trditvi.

**Trditev 2.4.** *Naj bo  $K$  končen komutativni kolobar. Potem je graf  $G_K$  regularen graf stopnje  $|K^*|$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $a \in K$  vozlišče. Poglejmo si množico  $N = \{a + u \mid u \in K^*\}$ . Ker je  $(a + u) - a = u \in K^*$  obrnljiv element, je to zagotovo podmnožica vseh sosedov vozlišča  $a$ . Naj bo  $b \in K$  sosed  $a$ . Potem obstaja tak  $v \in K^*$ , da je  $b - a = v$  obrnljiv. Torej je  $b = a + v$ . Vidimo, da je  $N$  natanko množica vseh sosedov  $a$ . Njena moč  $|K^*|$  je zato enaka stopnji elementa  $a$ , tj.  $\deg(a) = |K^*|$ . Ker to velja za vsako vozlišče, je graf regularen.  $\square$

**Trditev 2.5.** *Naj bo  $K$  končen komutativni kolobar. Potem je graf  $G_K$  poln natanko takrat, ko je  $K$  polje.*

*Dokaz.* Dokažimo najprej implikacijo v levo. Vemo, da je komutativni kolobar  $K$  polje natanko takrat, ko sta njegova edina ideala  $\{0\}$  in  $K$ . Ideal  $I = \{0\}$  je tako maksimalni. Že prej smo ugotovili, da sta vozlišči pri lokalnih kolobarjih  $a$  in  $b$  povezani natanko tedaj, ko  $a - b \notin I$ . Očitno je polje lokalni kolobar. Za vsako različna  $a$  in  $b$  je  $a - b \neq 0$ , torej  $a - b \notin I$ , kar pomeni, da sta vsaka dva elementa sosedna in graf je poln.

Še implikacija v drugo smer. Naj bo  $G_K$  poln. Torej je za vsaka različna elementa  $a$  in  $b$  razlika  $a - b = u \neq 0$  obrnljiva. Edini neobrnljiv element je tako  $u = 0$ . Zunaj množice  $\{0\}$  so zato sami obrnljivi elementi. Torej je  $I = \{0\}$  maksimalni ideal in zato je  $K$  polje.  $\square$

Preden povemo še kaj več o grafih  $G_K$ , kjer je  $K$  lokalni, si pogledajmo kaj je večdelni graf.

**Definicija 2.6.** Večdelni graf je graf  $G = (V, E)$ , kjer je množica vozlišč  $V = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ , kjer je  $X_i \cap X_j = \emptyset$  za  $i \neq j$  in za vsak  $i = 1, 2, \dots, k$  velja: Če sta  $x$  in  $y \in X_i$ , potem  $x$  in  $y$  nista povezana.

**Trditev 2.7.** *Naj bo  $K$  končen komutativen lokalni kolobar z maksimalnim idealom  $I$ . Potem je  $G_K$  poln večdelni graf, katerega deli so posamezni ekvivalenčni razredi glede na maksimalni ideal  $I$  v kvocientnem kolobarju  $K/I$ .*

**Primer 2.8.** Za lokalni kolobar tokrat vzemimo  $\mathbb{Z}_9$  in si pogledjmo graf  $G_{\mathbb{Z}_9}$ . Maksimalni ideal  $I$  je kar največja podgrupa  $I = \{0, 3, 6\}$ . Ekvivalenčni razredi so  $I, 1 + I = \{1, 4, 7\}$  in  $2 + I = \{2, 5, 8\}$ . Vozlišča ustrezno povežemo in jih preuredimo. Res dobimo poln večdelni graf, kjer je vsak del en ekvivalenčni razred kot pravi trditev.  $\diamond$

Izkaže se, da je  $\mathbb{Z}_n$  lokalni kolobar natanko takrat, ko je  $n$  potenca praštevila. Dobili smo neko predstavo kako izgleda Cayleyjev graf lokalnega kolobarja, nas pa zanima kako je, če je kolobar končen.

**Izrek 2.9.** *Vsak končen komutativen kolobar  $K$  je izomorfen direktnemu produktu končno mnogo končnih lokalnih kolobarjev.*

Naj bo zdaj  $K$  končen komutativen kolobar z enico  $1 \neq 0$ . Iz izreka 2.9 sledi, da je  $K \cong K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_t$  za neki  $t \in \mathbb{N}$ , kjer je  $K_i$  lokalni kolobar z maksimalnim idealom  $I_i$  za vsak  $i = 1, \dots, t$ . Vsak element  $u \in K$  je tako oblike  $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ . Element  $u$  je obrnljiv, če je obrnljiv posebej vsak  $u_i \in K_i$ , torej ko je  $u_i \in K_i^*$ .

**Definicija 2.10.** Naj bosta  $G_1$  in  $G_2$  grafa. Produkt grafov  $G_1$  in  $G_2$  definiramo kot  $G = G_1 \times G_2$ , kjer je množica vozlišč  $V = V_1 \times V_2$ . Vozlišči  $(u_1, u_2)$  in  $(v_1, v_2)$  sta povezani, če je  $\{u_1, v_1\} \in E_1$  in  $\{u_2, v_2\} \in E_2$ .

Naj bo  $G_K$  Cayleyjev graf. Če pogledamo še enkrat to definicijo, lahko razberemo, da je graf  $G_K$  produkt grafov  $G_{K_i}$ . Posamezno vozlišče je res oblike  $(u_1, u_2, \dots, u_t)$ . Dve vozlišči pa sta povezani, ko sta povezani v vsakem podgrafu  $G_{K_i}$ , kar se tudi ujema z definicijo obrnljivega elementa  $(u_1, u_2, \dots, u_t)$ . Torej  $(u_1, u_2, \dots, u_t)$  in  $(v_1, v_2, \dots, v_t)$  sta sosedni natanko takrat, ko je  $u_i - v_i \in K_i^*$  za vsak  $i$ . Zdaj uporabimo izrek 2.9, ki nam da lokalnost posameznega kolobarja  $K_i$ . Tako dobimo ekvivalentne definicije za sosednost kot prej. Da je  $u_i - v_i$  obrnljiv, je ekvivalentno  $u_i - v_i \notin I_i$  in tudi ekvivalentno  $\pi_i(u_i) = \pi_i(v_i)$

**Trditev 2.11.** *Naj bo  $K \cong K_1 \times \cdots \times K_t$  produkt končnih komutativnih lokalnih kolobarjev za nek  $t \in \mathbb{N}$ . Potem je graf  $G_K$  produkt polnih večdelnih grafov.*

*Dokaz.* Če gledamo vsak graf  $G_{K_i}$  posebej, sledi iz trditve 2.7, da so to polni večdelni grafi. Pogledjmo še povezave. Po definiciji sta  $(a_1, \dots, a_t)$  in  $(b_1, \dots, b_t)$  povezana, ko sta za vsak  $i$  povezana  $a_i$  in  $b_i$  oziroma  $a_i - b_i \in K_i^*$ . To pa res drži, saj je množica obrnljivih elementov  $K^* \cong K_1^* \times \cdots \times K_t^*$ .  $\square$

**Primer 2.12.** Za primer takega grafa lahko vzamemo  $G_{\mathbb{Z}_6}$ , saj  $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ . Grafa  $G_{\mathbb{Z}_2}$  in  $G_{\mathbb{Z}_3}$  sta vsak posebej polni grafa.  $\diamond$

3. SOSEDI VOZLIŠČ V CAYLEYJEVEM GRAFU

4. PREMIER IN OŽINA GRAFA

5. POVEZANOST IN BARVNOST

6. RAVNINSKOST

7. LASTNE VREDNOSTI

SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

LITERATURA

- [1] R. Akhtar, T. Jackson-Henderson, R. Karpman, M. Boggess, I. Jimenez, A. Kinzel, D. Pritikin, *On the unitary Cayley graph of a finite ring*, Electron. J. Combin. **16** (2009), no. 1, Research Paper 117, 13 pp.