

Radikal kolobarja (osnutek diplomske naloge)

Jakob Jurij Snoj (mentor: prof. dr. Matej Brešar)

28. 2. 2022

1 Uvod

Kolobarji so zelo široko obravnavana algebraična struktura, katere mnogi primeri se pojavljajo tudi v elementarni matematiki. V študiju matematike se z njimi tipično študent sreča precej zgodaj, pri čemer je morda v veliki meri poudarek na komutativnih kolobarjih ali celo strukturah z močnejšimi pogoji, kot so denimo polja. Čeprav ti pogoji s seboj velikokrat prinesejo kakšne močnejše rezultate, nam to, da jih ne privzamemo, marsikdaj dopušča, da se z njihovo obravnavo dotaknemo širših matematičnih objektov in vprašanj.

Opuščanje pogojev seveda s seboj prinese tudi večje izzive pri razumevanju objektov. Ena od idej, s katero lahko poskušamo strukturo kolobarjev bolje razumeti, je opazovanje ideala "slabih" elementov kolobarja, ki ga pomenujemo *radikal*. Seveda ni mogoče nedvoumno povedati, kateri elementi kolobarja so slabi in je to v veliki meri odvisno od tega, kaj konkretno so naši cilji, zato je tudi definiranih več različnih radikalov, ki imajo različno uporabo. Med najbolj znanimi in najpomembnejšimi je *Jacobsonov radikal*, ki ga bom obravnaval v diplomski nalogi.

2 Moduli

Teorija kolobarjev je v veliki meri sorodna s teorijo modulov – velikokrat lahko kolobarje boljše razumemo, če razumemo module nad temi kolobarji ter obratno. Pojem modula bomo uvedli, ker je z njim tesno povezan tudi pojem Jacobsonovega radikala.

Definicija 2.1. Naj bo R kolobar. **Levi R -modul** je abelova grupa $(M, +)$ opremljena z operacijo $R \times M \rightarrow M : (r, m) \rightarrow r \cdot m$, za katero velja:

- (a) $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$ za vsaka $m, n \in M$ in $r \in R$;
- (b) $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$ za vsak $m \in M$ in $r, s \in R$;
- (c) $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$ za vse $r, s \in R$ in $m \in M$;

Če ima R enoto in velja

- (d) $1 \cdot m = m$ za vsak $m \in M$,

je M **enotski R -modul**.

V nadaljevanju bomo razen, ko bo to jasno navedeno, pojem modula za enostavnost enačili s pojmom levega modula. Pripomnimo lahko, da obstajajo še desni R -moduli, ki jih definiramo podobno, ključna razlika pa je, da operacija, ki jo definiramo v tem primeru, slika iz $M \times R$ v M – z drugimi besedami, množimo z desne strani.

Za definicijo Jacobsonovega radikala potrebujemo tudi koncept enostavnega modula.

Definicija 2.2. Modul M nad kolobarjem R je **enostaven**, če velja $RM \neq 0$ in sta edina njegova podmodula 0 in M .

Eni od najpreprostejših primerov modulov so Abelove grupe, ki jih lahko opazujemo kot $\mathbb{Z}$ -module, če na njih definiramo množenje s celimi števili s predpisom

$$n \cdot m = \underbrace{m + m + \dots + m}_{n\text{-krat}} \quad \text{za } n \in \mathbb{N}$$

in $(-n) \cdot m = -(n \cdot m)$. Opazimo lahko tudi, da so grupe ostankov po nekem praštevilskem modulu pri tej definiciji tudi enostavni $\mathbb{Z}$ -moduli, saj nimajo pravih netrivialnih podgrup in torej niti podmodulov.

3 Jacobsonov radikal

Kot smo nakazali v uvodu, je Jacobsonov radikal kolobarja ideal, ki vsebuje vse “slabe” elemente danega kolobarja. Elementi, ki jih v tem primeru opazujemo, so vsi elementi, ki “ubijejo” vsak enostaven modul nekega kolobarja.

Definicija 3.1. **Jacobsonov radikal** kolobarja R je množica vseh elementov $q \in R$, za katere velja $qM = 0$ za vsak enostaven R -modul M . Označujemo ga z $\text{rad}(R)$. Če R nima enostavnih modulov, definiramo $\text{rad}(R) = R$.

Mnogi izmed najpogostejše obravnavanih kolobarjev imajo trivialne radikale, kot denimo kolobar celih števil.

Primer 3.2. Naj bo p poljubno praštevilo. Kot smo ugotovili v prejšnjem razdelku, lahko grupo ostankov po modulu p pod seštevanjem opazujemo kot enostaven $\mathbb{Z}$ -modul. Če velja $qm = 0$ za nek neničelen ostanek m , mora biti q večkratnik števila p , torej so v Jacobsonovem radikalu samo števila, ki so večkratniki vseh praštevil, oziroma samo število 0 . Radikal je torej v tem primeru trivialen.

Izkaže se, da je definicija Jacobsonovega radikala levo–desno simetrična. Velja namreč, da dobimo popolnoma isto množico, če v definiciji leve enostavne R -module nadomestimo z desnimi.

Eden izmed ključnih razlogov, zakaj nas radikal kolobarja podrobneje zanima, je dejstvo, da ima kolobar $R/\text{rad}(R)$ trivialen radikal, česar uporabnost bomo rahlo jasneje argumentirali kasneje. Pri določanju radikala nam pomaga tudi, denimo, lastnost, da je radikal kompatibilen z direktnim produktom ter na nek način tudi z ideali: če je I ideal kolobarja R , velja $\text{rad}(I) = I \cap \text{rad}(R)$.

4 Uporaba Jacobsonovega radikala

Zanima nas, kako vpeljava Jacobsonovega radikala, torej, idejno, opazovanje slabih elementov kolobarja, pripomore k razumevanju kolobarja oziroma reševanju kakšnega povezanega problema. V prejšnjem delu smo nakazali, da ima kolobar $R/\text{rad}(R)$ trivialen radikal, kar je že pomemben prvi korak – če se na nek način znebimo slabih elementov kolobarja, torej znamo opazovati primeren kvocientni kolobar, bomo s tem nalogo morda poenostavili.

Kolobarje, katerih radikal je trivialen, imenujemo *polprimitivni* kolobarji. Ena od ključnih idej pri reševanju problemov z uporabo Jacobsonovega radikala je torej reduciranje problema na danem kolobarju R na problem na polprimitivnem kolobarju $R/\text{rad}(R)$.

Na tej točki se da problem pogosto reducirati na nek drug razred kolobarjev, ki ga imenujemo *primitivni* kolobarji. Izkaže se, da so problemi na primitivnih kolobarjih pogosto veliko bolj obvladljivi kot v splošnem, zato nas takšno reduciranje pogosto pripelje do problema, ki ga znamo nato rešiti z uporabo dejstev, povezanih s primitivnimi kolobarji.

Primer izreka, ki ga lahko na tak način dokažemo z uporabo Jacobsonovega radikala, je *Jacobsonov izrek*.

Izrek 4.1. Če v kolobarju R za vsak $x \in R$ obstaja naravno število $n(x) \geq 2$, da velja enakost $x^{n(x)} = x$, potem je R komutativen.

Še en primer izreka, povezanega z Jacobsonovim radikalom, je lema Nakayame.

Izrek 4.2. Naj bo R kolobar z enoto in M neničelni končno generiran enotski R -modul. Potem je $\text{rad}(R)M$ pravi podmodul modula M .

5 **Viri in literatura**

- Brešar, Matej: Introduction to Noncommutative Algebra. Universitext. Springer International Publishing AG (2014)