

Kvaternionske iteracije

Luka Simčič

mentorica: izr. prof. dr. Jasna Prezelj

februar 2022

1 Uvod

Dimplomsko delo spada na področje kvaternionske dinamike. Za različne kvaternionske funkcije kvaternionske spremenljivke nas bo zanimala omejenost zaporedij $q_0, f(q_0), f(f(q_0)), \dots$ za različne začetne točke q_0 .

Najprej si bomo pogledali nekaj osnovnega o kvaternionski analizi in definirali razred funkcij, ki služi kot posplošitev holomorfnih. Predstavil bom tudi analogen problem v kompleksnem primeru, kjer je teorija že precej razvita. Ker kvaternionska dinamika še ni dobro razvita in bom do kakšnega rezultata poskušal priti tudi sam ter ker si bom pisanje diplome podaljšal v dodatno leto, do vseh zaključkov na tej točki še nisem prišel. V zadnjem poglavju bom tako orisal problem podrobneje in napovedal, da bom podrobneje raziskoval iteracijo s kvadratnimi polinomi.

2 O kvaternionski analizi

Od začetka prejšnjega stoletja so številni matematiki poskušali najti razred kvaternionskih funkcij ene kvaternionske spremenljivke, ki bi služil kot posplošitev holomorfnih funkcij v kompleksnem primeru.

Naraven poskus je posplošitev kompleksnega (ali realnega) odvoda.

Definicija 1 *Kvaternionska funkcija kvaternionske spremenljivke $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ je kvaternionsko diferenciable, če za vsak $q \in \Omega$ obstaja limita*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(f(q+h) - f(q))$$

Ker kvaternionsko množenje ne premore komutativnosti, smo v limiti po dogovoru h^{-1} množili z leve. Izkaže se, da taki zahtevi ustrezajo samo linearni polinomi $f(q) = a + qb$ za neka $a, b \in \mathbb{H}$. Poskušajmo najti milejšo zahtevo.

Holomorfne funkcije se lahko klasificira tudi s Cauchy-Riemannovo enačbo

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \equiv 0$$

V dvajsetih letih prejšnjega stoletja jo je švicarski matematik Rudolf Fueter posplošil in uvedel nov razred funkcij.

Definicija 2 *Kvaternionska funkcija kvaternionske spremenljivke $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ je Feutersko regularna, če na Ω reši enačbo*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}(q) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} + i \frac{\partial f}{\partial x_1} + j \frac{\partial f}{\partial x_2} + k \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)(q) \equiv 0$$

Izkaže se, da je $\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}$ dobra analogija Cauchy-Riemannovega operatorja, saj za Feutersko regularne funkcije velja na primer Cauchyjev izrek, da se tudi posplošiti Taylorjevo in Laurentovo vrsto. Po drugi strani pa še nismo zadovoljni, ker se Feuterska regularnost ne ohranja pri množenju po točkah, pa tudi identiteta ni Feutersko regularna.

Več kot 30 let kasneje je C. G. Cullen podal novo posplošitev Cauchy-Riemannove enačbe. Na kvaternion $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ je pogledal raje kot na vsoto realnega in imaginarnega dela $q = x + yI$, kjer sta x in y realni števili, I pa imaginarna enota, torej element enotske imaginarne krogle

$$\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} ; q^2 = -1\} = \{x_1i + x_2j + x_3k ; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Definicija 3 *Kvaternionska funkcija kvaternionske spremenljivke $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ je Cullensko regularna (tudi rezinsko regularna ali kar regularna), če za vsak $q = x + yI \in \Omega$ velja*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}}(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right)(x + yI) \equiv 0$$

Regularne funkcije nudijo bogato teorijo. Da se pokazati, da vsaka potenčna vrsta oblike $\sum q^n a_n$, kjer je $a_n \in \mathbb{H}$, definira regularno funkcijo na svoji domeni, ki je evklidska krogla s središčem v izhodišču. Obratno, vsako regularno funkcijo se da razviti v potenčno vrsto take oblike. Na začetku tega tisočletja sta italijanska matematika Gentili in Struppa razvila fundamentalno teorijo Cullensko regularnih funkcij na kroglih v izhodišču, na primer Cauchyjevo formulo, Cauchyjevo neenakost, Liouvillov in Morerov izrek. Kasneje so teorijo posplošili na regularne funkcije, definirane na posebnem razredu domen, ki se imenujejo simetrične rezinske domene in katerih posebni primer so krogle s središčem v izhodišču. Natanko te funkcije se

da na svojih domenah razviti v vrsto, zato bomo od zdaj naprej regularne funkcije pisali kot vrste. Zaradi manj pisanja bodo oblike

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n,$$

torej z domeno okoli izhodišča.

Zaradi nekomutativnosti v $\mathbb{H}$ je potrebno produkt kvaternionskih funkcij po točkah posebej definirati. Naj bosta v nadaljevanju $f = \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$ in $g = \sum_{n=0}^{\infty} q^n b_n$ regularni kvaternionski funkciji kvaternionске spremenljivke.

Definicija 4 *Produktu po točkah rečemo *-produkt funkcij f in g ter ga definiramo kot*

$$(f * g)(q) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n \right) * \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

Opazimo, da *-produkt ohranja regularnost. Če so koeficinti a_n in b_n iz iste rezine $\mathbb{C}_I = \{x + Iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, se *-produkt na tej rezini ujema z že poznanim produktom, saj so števila iz iste rezine med samo komutativna.

Definicija 5 *Kompozitum funkcij f in g definiramo kot*

$$(f \bullet g)(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(g * g * \dots * g)}_n(q) a_n$$

Ker *-produkt ohranja regularnost, jo ohranja tudi kompozitum $\bullet$. Vpeljimo še oznako

$$f^{*n}(q) = \underbrace{(f \bullet f \bullet \dots \bullet f)}_n(q)$$

V svoji diplomski nalogi se bom ukvarjal s konvergenco zaporedij $\{f^{*n}(q_0)\}_{n=0}^{\infty}$ za različne regularne funkcije $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ in $q_0 \in \Omega$.

3 Terminologija iteracij

Iteracija je proces ponavljajočega apliciranja funkcije, kjer se rezultat prejšnje iteracije uporabi kot vhod naslednje. Tudi tu naj bo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$, $\Omega \subset \mathbb{H}$ regularna kvaternionska funkcija kvaternionске spremenljivke.

Definicija 6 Naj bo $q_0 \in \Omega$. Zaporedju

$$\{f^{*n}(q_0)\}_{n=0}^{\infty} = q_0, f(q_0), f^{*2}(q_0), \dots$$

pravimo orbita točke q_0 za funkcijo f , točki q_0 pa seme orbite.

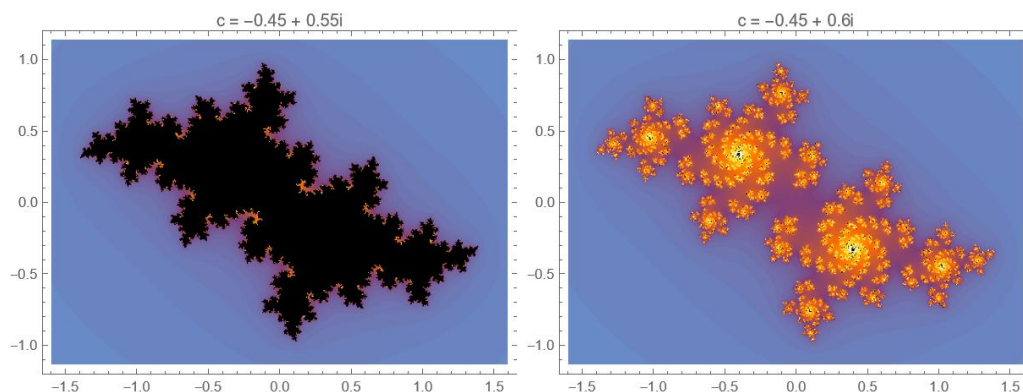
Zanimala nas bodo območja semen, katerih orbite so omejene.

Definicija 7 Napolnjena Juliajeva množica K_f za funkcijo f so tisti $q_0 \in \Omega$, ki imajo omejene orbite za f . Fatoujeva množica F_f je komplement K_f na Ω .

4 Iteracije s kompleksnimi funkcijami

Kompleksna dinamika je precej starejše področje kot kvaternionska. Začetki segajo v konec 19. stoletja, med največje dosežke pa štejemo dela Gastona Juliaja in Pierra Fatouja iz 40. let 20. stoletja. Za lažjo predstavbo in dodatno motivacijo bomo pogledali primer iteracije nekaterih kompleksnih funkcij kompleksne spremenljivke.

Začnimo s polinomi. Orbite konstant so točke, zato je cela ravnina Napolnjena Juliajeva množica. Linearni polinomi so prav tako trivialni, zato se posvetimo kvadratnim. Z zamenjavo koordinat lahko vsak polinom oblike $f(z) = az^2 + bz + c$ prevedemo na obliko $f(z) = z^2 + c$ za nek nov $c \in \mathbb{C}$. Poglejmo si torej napolnjene Juliajeve množice za različne c . Za $c = 0$ bodo orbite semen znotraj enotskega kroga konvergirale k 0, orbite semen na enotski krožnici bodo tam tudi ostale, tiste zunaj pa bodo odhajale proč od izhodišča. Torej bo Napolnjena Juliajeva množica za $c = 0$ enotski krog. Spodnji slici pa prikazujeta še dva primera.



5 Iteracije s kvaternionskimi funkcijami

Kvaterninsko dinamiko so začeli raziskovati proti koncu 20. stoletja. Izkaže se, da dodatni dimenziji in nekomutativnost ne vplivata na trivialnost iteracij lineranih funkcij. Poglejmo zato orbite $\{f^{*n}(q_0)\}_{n=0}^{\infty}$, kjer je f kvadratni polinom oblike $f(q) = q^2a + qb + c$ in kjer so koeficienti a , b in c poljubni kvaternioni.

V kompleksnem primeru smo z zamenjavo koordinatnega sistema kompleksni kvadratičen polinom kompleksnih koeficientov in spremenljivke $g(z) = az^2 + bz + c$ prevedli na obliko $g(z) = z^2 + c$ za nek nov $c \in \mathbb{C}$. To smo dosegli s kompozitumom $(\phi^{-1} \circ g \circ \phi)(z)$, kjer je ϕ linearna preslikava $\phi(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Analogno želimo poenostaviti obliko kvaternionske funkcije f . Problem je, da morajo biti zdaj koeficienti α in β linearne preslikave ϕ realni, saj bodo samo tako komutirali s koeficienti a , b in c ter spremenljivko q polinoma f . Nisem (še) našel primerne posplošitve, velja pa

$$(\phi^{-1} \circ f \circ \phi)(q) = q^2\alpha a + q(b + 2\beta a) + \frac{c - \beta + \beta b + \beta^2 a}{\alpha}$$

V dimlonskem delu bom poskušal najti kak rezultat o Napolnjenih Juliajevih množicah za kvadratne polinome f kot zgoraj, na primer za posebne primere, kot so, da so koeficienti realni, ali pa iz iste rezine.

6 Literatura

- G. Gentili, C. Stoppato in D. Struppa, *Regular Functions of a Quaternionic Variable*, Springer, Berlin, 2013.
- P. Bourke, *Quaternion Julia Fractals*, julij 2001, [februar 2022], dostopno na <http://paulbourke.net/fractals/quatjulia/>.