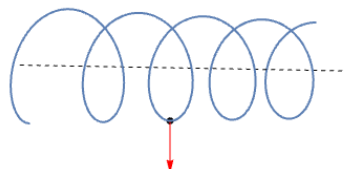


2. Domače naloge iz Mehanike

22. januarja 2021

1. Masna točka z maso m se giblje po gladki vijačnici, ki se enakomerno vrti okrog svoje osi. Na točko deluje sila teže, ki je pravokotna na os vijačnice, glej sliko.



- (a) Zapiši enačbe gibanja v RKS, ki se vrti hkrati z vijačnico. Nasvet: uporabi cilindrični koordinatni sistem
- (b) Poišči ravnovesne položaje.
- (c) Za gibanje v okolici stabilne ravnovesne lege poišči harmonično aproksimacijo periode gibanja.

Rešitev

- (a) Postavimo inercialni KS tako da je os vijačnice v smeri osi z , navpičnica pa v smeri osi x . Bazne vektorje RKS označimo z $\vec{e}_i$ tako, da je $\vec{e}_3$ v smeri osi z . RKS se enakomerno vrti okrog osi vijačnice. Pripadajoči vektor hitrosti je potem $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$. V relativni bazi velja

$$\vec{r} = \cos \omega t \vec{e}_1 - \sin \omega t \vec{e}_2. \quad (1)$$

Vijačnico zapišemo v polarnem koordinatnem sistemu (r, θ, z) z baznimi vektorji $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ in $\vec{e}_3$. Položaj točke na vijačnici je potem dan z

$$\vec{\zeta} = R \vec{e}_r + R \tan \alpha \vec{e}_3. \quad (2)$$

Tu je R polmer vijačnice, α pa njen naklonski kot. Na točko na vijačnici deluje sila teže $\vec{F} = -mg \vec{e}_3$ in sila vezi $\vec{S}$. Ker je vijačnica gladka, je $\vec{S}$ pravokotna na tangento na vijačnico. Nadalje je vektor relativne hitrosti $\vec{v}_{rel} = \dot{\theta}(R \vec{e}_\theta + R \tan \alpha \vec{e}_3)$, ki je v smeri tangente. Potem za silo vezi $\vec{S} = S_r \vec{e}_r + S_\theta \vec{e}_\theta + S_3 \vec{e}_3$ velja

$$0 = \vec{S} \cdot \vec{v}_{rel} = R \dot{\theta} (S_\theta + S_3 \tan \alpha) \quad (3)$$

Newtonova enačba v RKS se glasi

$$m \vec{a}_{rel} = \vec{F} + \vec{S} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}. \quad (4)$$

Tu smo upoštevali, da imata AKS in RKS skupno izhodišče in da se RKS enakomerno vrti. Izračunajmo posebej

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) = -R \omega^2 \vec{e}_r \quad \text{in} \quad \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = -R \omega \dot{\theta} \vec{e}_r.$$

Upoštevajmo še, da je

$$\vec{a}_{rel} = -R \ddot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + R \tan \alpha \ddot{\theta} \vec{e}_3.$$

Enačbe bomo po komponentah zapisali v polarnem KS. V ta namen upoštevajmo (1) in izračunajmo

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_r = -mg \cos(\omega t + \theta) \quad \text{in} \quad \vec{F} \cdot \vec{e}_\theta = mg \sin(\omega t + \theta). \quad (5)$$

Pomnožimo (4) s polarnimi baznimi vektorji. Tako dobimo enačbe

$$\begin{aligned} -mR\dot{\theta}^2 &= -mg \cos(\omega t + \theta) + mR\omega^2 + 2mR\omega\dot{\theta} + S_r, \\ mR\ddot{\theta} &= mg \sin(\omega t + \theta) + S_\theta, \\ mR \tan \alpha \ddot{\theta} &= S_3. \end{aligned} \quad (6)$$

- (b) Iz (3) sledi, da je $S_\theta = -\tan \alpha S_3$. Upoštevajmo to v drugi in tretji enčbi v (6). Tako dobimo

$$\frac{mR}{\cos^2 \alpha} \ddot{\theta} = mg \sin(\omega t + \theta). \quad (7)$$

Stacionarna rešitev enačbe je $\theta = -\omega t + k\pi$. V AKS tem rešitvam ustrezajo ravnovesni položaji, ki so natanko točke na vijačnici z x koordinato enako $\pm R$.

- (c) Stabilni ravnovesni položaji so spodnji položaji, torej ko je k liho celo število. Oglejmo si majhno nihanje v okolici ravnovesne lege $\theta_0 = -\omega t + \pi$. Zapišimo $\theta = \theta_0 + \varphi$. Potem iz (7) sledi

$$\frac{mR}{\cos^2 \alpha} \ddot{\varphi} + mg \sin(\varphi) = 0. \quad (8)$$

Dobili smo modificirano enačbo matematičnega nihala. Pri harmonični aproksimaciji $\sin \varphi \approx \varphi$ dobimo enačbo harmoničnega gibanja

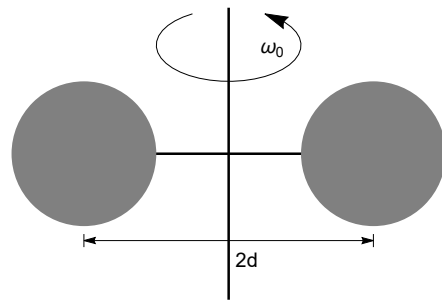
$$\frac{mR}{\cos^2 \alpha} \ddot{\varphi} + mg \varphi = 0. \quad (9)$$

Pripadajoča perioda gibanja je

$$T = \frac{2\pi}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (10)$$

2. Veternica, sestavljena iz dveh enakih krogov s polmerom r in maso m je vrtljiva okrog pokončne osi, glej skico. V začetnem trenutku veternica miruje, v njo pa centralno prileti z brzino v_0 , natanko v središče desnega kroga masna točka z maso M .

- (a) Po trku se točka spoji s krogom. Določi kotno hitrost veternice po trku.
- (b) Veternica se zavrti, na njo pa deluje linearen upor zraka. Za primer $M = m/4$ in $d = 2r$ izračunaj v kolikšnem času se začetna kotna hitrost zmanjša na polovično vrednost.



Rešitev

- (a) Začetno kotno hitrost dobimo iz zakona o ohranitvi vrtilne količine. Vrtilna količina točke je enaka $L_0 = Mdv_0$. Označimo z J vztrajnostni tenzor vetrnice s točko. Potem je po zakonu o ohranitvi vrtilne količine $J\omega_0 = L_0$. Od tod

$$\omega_0 = \frac{Mdv_0}{J}. \quad (11)$$

Izračunati moramo še J . Vztrajnostni moment kroga okrog osi v ravnini kroga, ki gre skozi središče kroga je $J_0 = \frac{1}{4}mr^2$. Po Steinerjevem izreku je vztrajnostni moment glede na os vetrnice enaka $J_0 + md^2$ in tako

$$J = 2(J_0 + md^2) + Md^2 = \frac{19}{2}mr^2. \quad (12)$$

Vstavimo (12) v (11). Tako dobimo

$$\omega_0 = \frac{v_0}{19r}.$$

- (b) Vrtenje vetrnice določa enačba $J\dot{\omega} = N$, kjer je N komponenta navora sile upora zraka okrog osi vetrnice. Izračunajmo N . Velja

$$\vec{N} = 2 \int_A d\vec{N} = 2 \int_A \vec{r} \times d\vec{f},$$

kjer je A krog vetrnice. Postavimo polarni KS (ρ, θ) v središče kroga z osjo $\vec{j}$ v smeri osi vetrnice. Potem je

$$\vec{r} = d\vec{i} + \rho\vec{e}_r(\theta) = (d + \rho \cos \theta)\vec{i} + \rho \sin \theta \vec{j}$$

in

$$d\vec{f} = \mu v \vec{k} dA = \mu(d + \rho \cos \theta)\omega \vec{k} dA.$$

Tu smo z $\mu > 0$ zapisali koeficient upora. Tako je

$$d\vec{N} = (\mu\rho\omega(d + \rho \cos \theta)\vec{i} - \mu\omega(d + \rho \cos \theta)^2\vec{j}) dA.$$

Po integraciji po krogu dobimo

$$\vec{N} = -\mu\omega\pi r^2\left(\frac{1}{2}r^2 + 2d^2\right)\vec{j} = -\frac{17}{2}\mu\omega\pi r^4\vec{j}. \quad (13)$$

Združimo (12) in (13) v enačbi $J\dot{\omega} = N$. Dobimo

$$\dot{\omega} = -\frac{17\mu\pi r^2}{19m}\omega = -k\omega, \quad k = \frac{17\mu\pi r^2}{19m} \quad (14)$$

Rešitev enačbe pri začetnem pogoju $\omega(t=0) = \omega_0$ je

$$\omega = \omega_0 e^{-kt}. \quad (15)$$

Začetna kotna hitrost se zmanjša na polovico v času

$$t = \frac{\log 2}{k}.$$

3. (a) Za homogeno polkroglo izračunaj vztrajnostni tenzor s polom v masnem središču.
- (b) Za kotaljenje polkrogle po ravni podlagi zapiši gibalne enačbe in določi frekvenco majhnega nihanja okoli ravnovesne lege. Tu predpostavi, da je gibanje polkrogle ravninsko.

(c) Naredi enako kot pri predhodni točki za kotaljenje polkrogle v okrogli kotanji.

Rešitev

- (a) Postavimo KS s središčem v osnovni ploskvi polkrogle in usmerimo oz z v smer telesa. Zaradi rotacijske simetrije je vztrajnostni tenzor v tem KS diagonalen. Izračunajmo momente

$$K_x = \int_B x^2 dm, \quad K_y = \int_B y^2 dm, \quad K_z = \int_B z^2 dm.$$

Očitno je $K_x = K_y$. Označimo z ρ gostoto, z R pa polmer polkrogle. Potem je

$$K_x = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta = \rho \frac{R^5}{5} \pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \frac{2\rho R^5 \pi}{15}.$$

Upoštevajmo, da je $m = \frac{2}{3}\rho R^3 \pi$. Tako smo dobili

$$K_y = K_x = \frac{1}{5}mR^2.$$

Izračunajmo še K_z .

$$K_z = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta r^2 \cos^2 \theta = \rho \frac{2R^5}{5} \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\rho R^5 \pi}{15}.$$

Potem

$$K_z = \frac{1}{5}mR^2$$

in

$$\underline{J} = \frac{2}{5}mR^2 \underline{I}.$$

- (b) V nadaljevanju naloge potrebujemo vztrajnostni moment skozi masno središče polkrogle okrog osi, ki je vzporedna osnovni ploskvi polkrogle. Ta moment dobimo z Steinerjevim izrekom. Masno središče leži na osi z . Njena z koordinata je

$$z_* = \frac{1}{m} \int_B z dm = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} r \cos \theta = \frac{3}{8}R.$$

Potem je iskani moment enak

$$J = \frac{2}{5}mR^2 + mz_*^2 = \frac{173}{320}mR^2.$$

Za kotaljenje polkrogle velja izrek o energiji. Ker ima naloga pri predpostavki ravninskega gibanja eno samo prostostno stopnjo, to je kot zasuka polkrogle, je najhitrejša pot do enačb gibanja uporaba izreka o energiji. Prvo izračunajmo potencialno energijo. V ta namen potrebujemo koordinate masnega središča polkrogle. Določili jih bomo za primer, ko se polkrogla kotali v polkrogli s polmerom $a > R$. Primer, ko je podlaga ravna dobimo z limito $a \rightarrow \infty$.

Naj bo xy ravnina gibanja in usmerimo os x v smeri sile teže. Naj bo φ kot zasuka krogle, θ pa kot, ki je označen na sliki. Kota nista neodvisna, povezuje ju pogoj kotaljenja

$$a\theta = R\varphi. \quad (16)$$

Iz slike razberemo, da je krajevni vektor do masnega središča

$$\vec{r}_* = (a - R)\vec{e}_r(\theta) + z_*(\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j}). \quad (17)$$

Potencialna energija je

$$U = -mg\vec{r}_* \cdot \vec{i} = -mg((a - R)\cos\theta + z_*\cos\varphi).$$

Ravnovesni položaj je stabilen v lokalnem minimumu potencialne energije. Upoštevajmo (16) in izračunajmo

$$U' = \frac{dU}{d\theta} = mg\left((a - R)\sin\theta + z_*\frac{a}{R}\sin\varphi\right).$$

Ravnovesni položaj je $\theta = 0$. Pri tej vrednosti je tudi $\varphi = 0$. Drugi odvod je

$$U'' = mg\left((a - R)\cos\theta + z_*\frac{a^2}{R^2}\cos\varphi\right).$$

V ravnovesni legi je

$$U_0 = U''(\theta = 0) = mg\frac{8aR - 8R^2 + 3a^2}{8R}.$$

Ker je $R < a$, je $U_0 > 0$ in ravnovesni položaj je stabilen.

Kinetična energija je

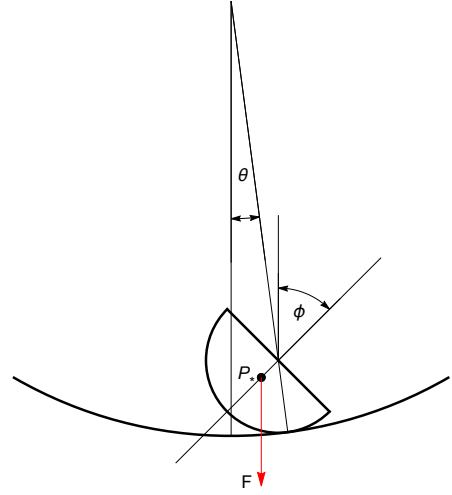
$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_*^2.$$

Iz (17) sledi

$$\vec{v}_* = \left((a - R)\vec{e}_\theta(\theta) - z_*(\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j})\frac{a}{R}\right)\dot{\theta}.$$

V energijski enačbi $T + U = E_0$ pri harmonični aproksimaciji v okolici ravnovesne lege zanemarimo člene, ki so manjši od drugega reda. Ker je velikost $\dot{\theta}$ prvega reda, lahko potem pri izračunu kinetične energije vzamemo $\theta = 0$. Po tej aproksimaciji je

$$\vec{v}_* = \left((a - R) - z_*\frac{a}{R}\right)\dot{\theta}\vec{j} = \left(\frac{5}{8}a - R\right)\dot{\theta}\vec{j}$$



in

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{173}{320}R^2 + \left(\frac{5}{8}a - R \right)^2 \right) \dot{\theta}^2.$$

Frekvenca ω majhnega nihanja je potem dana z enakostjo

$$\omega^2 = \frac{g(a - R + 3a^2/(8R))}{\left(\frac{173}{320}R^2 + \left(\frac{5}{8}a - R \right)^2 \right)}.$$

V limiti $a \rightarrow \infty$ dobimo

$$\omega = \frac{2}{4} \sqrt{\frac{6g}{R}}.$$

4. S stropa visi zaporedje n jojo-jev, glej skico za primer $n = 3$.

- Določi gibanje jojojev za $n = 1, 2$ in 3 .
- Zapiši enačbe gibanja za poljubni $n \geq 3$ in izrazi rešitev enačb gibanja z rešitvijo linearnega sistema.
- Poskusi ugotoviti kako se giblje najnižji jojo v limiti $n \rightarrow \infty$. Tu lahko uporabiš računalnik.

Rešitev

- Začnimo z $n = 2$. Na skici spodaj na desni so označene sile in položaja valjev. Enačbi gibanja središč valjev sta

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= mg - S_1 + S_2, \\ m\ddot{x}_2 &= mg - S_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Rotacijski enačbi sta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_1 &= rS_1, \\ \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_2 &= rS_2. \end{aligned}$$

Tu smo z φ_1 in φ_2 zapisali kota odvijanja valjev. Kinematični zvezi med x_i in φ_i sta

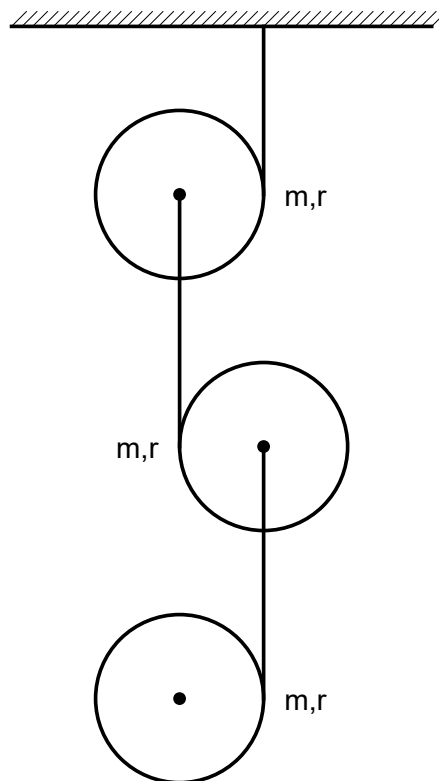
$$\dot{x}_1 = r\dot{\varphi}_1 \quad \text{in} \quad \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = r\dot{\varphi}_2.$$

Potem je

$$S_1 = \frac{1}{2}m\ddot{x}_1 \quad \text{in} \quad S_2 = \frac{1}{2}m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1).$$

Tako iz (18) dobimo sistem

$$\begin{aligned} 2\ddot{x}_1 - \frac{1}{2}\ddot{x}_2 &= g, \\ -\frac{1}{2}\ddot{x}_1 + \frac{3}{2}\ddot{x}_2 &= g. \end{aligned}$$



Rešitev sistema je

$$x_1 = \frac{8g}{11}, \quad x_2 = \frac{10g}{11}.$$

Za $n = 1$ je hitro dobimo rešitev

$$x_1 = \frac{2g}{3}.$$

Za $n = 3$ pa imamo enačbe

$$m\ddot{x}_1 = mg - S_1 + S_2,$$

$$m\ddot{x}_2 = mg - S_2 + S_3,$$

$$m\ddot{x}_3 = mg - S_3,$$

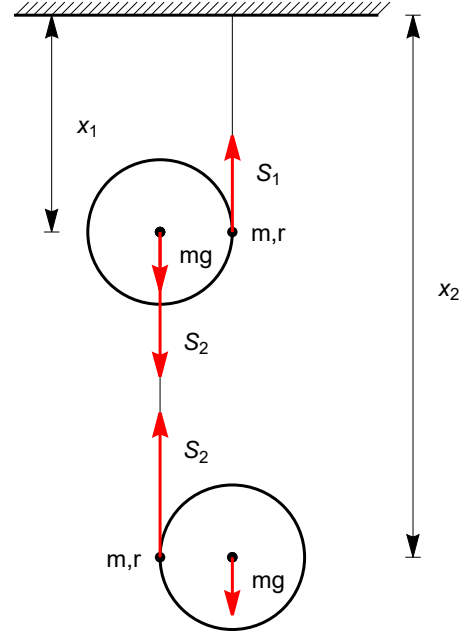
$$\frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_i = rS_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\dot{x}_1 = r\dot{\varphi}_1,$$

$$\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1} = r\dot{\varphi}_i, \quad i = 2, 3.$$

Iz sistema enačb eliminiramo kote in sile.

Tako dobimo linearen sistem



$$\begin{aligned} 2\ddot{x}_1 - \frac{1}{2}\ddot{x}_2 &= g, \\ -\frac{1}{2}\ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 - \frac{1}{2}\ddot{x}_3 &= g, \\ -\frac{1}{2}\ddot{x}_2 + \frac{3}{2}\ddot{x}_3 &= g. \end{aligned} \quad (19)$$

Rešitev sistema je

$$x_1 = \frac{30g}{41}, \quad x_2 = \frac{38g}{41}, \quad x_3 = \frac{40g}{41}.$$

(b) Za $n > 3$ vidimo, da za i -ti valj, $1 < i < n$ veljajo enačbe

$$m\ddot{x}_i = mg + S_i - S_{i-1}, \quad \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_i = rS_i, \quad \dot{x}_i - \dot{x}_{i-1} = r\dot{\varphi}_i.$$

To je v bistvu enačba za $i = 2$ pri $n = 3$. Enačba za $i = 1$ je nespremenjena, enačba za $i = n$ pa je

$$m\ddot{x}_n = mg - S_{n-1}, \quad \frac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi}_n = rS_n, \quad \dot{x}_n - \dot{x}_{n-1} = r\dot{\varphi}_n.$$

Po eliminaciji kotov in sil dobimo tridiagonalni sistem za pospeške $\ddot{x}_i$ z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Desna stran je stolpec, kjer so vsi elementi enaki g .

(c) Rešitev $\ddot{x}_n$ dobimo s Cramerjevim pravilom $\ddot{x}_n = \det B / \det A$, kjer je

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & g \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & g \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & g \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & g \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2} & 2 & g \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & g \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Determinati lahko izračunamo rekurzivno. Rekurzivni formuli dobimo z razvojem determinante po prvi vrstici. Označimo z d_n determinanto matrice A reda $n \times n$. Rekurzivna formula za d_n se glasi

$$d_{n+2} - 2d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n = 0, \quad d_3 = \frac{41}{8}, \quad d_2 = \frac{11}{4}.$$

Pripadajoča karakteristična enačba je

$$\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Rešitvi sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}).$$

Splošna rešitev je potem

$$d_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n.$$

Začetna pogoja pri $n = 2$ in $n = 3$ določata konstanti α in β . Tako dobimo

$$d_n = \frac{1}{6} \left((3 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}/2)^n + (3 - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}/2)^n \right).$$

Označimo z e_n determinanto matrice B reda $n \times n$. Rekurzivna formula za e_n se glasi

$$e_{n+2} - 2e_{n+1} + \frac{1}{4}e_n = -\frac{g}{2^{n+1}}, \quad e_3 = 5g, \quad e_4 = \frac{19g}{2}.$$

Leva stran enačbe je prav taka kot pri d_n , partikularno rešitev pa uganemo, da je $-2^{-n}g$. Potem je splošna rešitev

$$e_n = (\gamma\lambda_1^n + \delta\lambda_2^n - 2^{-n})g.$$

Začetna pogoja pri $n = 3$ in $n = 4$ določata konstanti γ in δ . Po krajšem računu se izkaže, da je

$$e_n = g(d_n - 2^{-n}).$$

Potem je

$$\ddot{x}_n = \frac{e_n}{d_n} = g - \frac{g}{2^n d_n}.$$

Ker je d_n naraščajoče zaporedje, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{x} = g.$$

V limiti zadnji valj pada v prostem padu.