

6. 10. 21 OSNOVE NEWTONOVE MEHANIKE

Literatura

- Aganovič, Veselič, *Uvod v analitičnu mehaniku*, Matematički odjel Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta, Zagreb, 1990 1–3.
- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 1–11.
- Epstein, M. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*, CUP, Cambridge, 2010, 46–52.

Definicija Množica $\mathcal{A}$ je afini prostor nad vektorskim prostorom $\mathcal{V}$, če obstaja operacija $\mathcal{A} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{A}$, $(A, \vec{a}) \mapsto A + \vec{a}$, tako da velja:

- $(A + \vec{a}) + \vec{b} = A + (\vec{a} + \vec{b})$
- za poljubni točki $A, B \in \mathcal{A}$ obstaja natanko določen $\vec{a} \in \mathcal{V}$, tako da velja $B = A + \vec{a}$.

Definicija Nad $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$ je definirana operacija $B - A = \vec{a} \iff B = A + \vec{a}$.

Trditev Velja

- $A - A = \vec{0}$,
- $(A - B) + (B - A) = \vec{0}$,
- $(A - B) + (B - C) + (C - A) = \vec{0}$,
- $(A + \vec{a}) - B = (A - B) + \vec{a}$.
- $A + (B - C) = B + (A - C)$.

Definicija afine preslikave, neodvisnos afine preslikave od izbire pola.

Definicija Galilejeva struktura $\mathcal{G}$ je trojica $(\mathcal{A}, t, \rho)$, kjer je

- $\mathcal{A}$ štiri dimenzionalni afini prostor nad vektorskim prostorom $\mathcal{V}$,
- $t \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$,
- ρ evklidska razdalja na $\text{Ker } t$.

Elementom prostora $\mathcal{A}$ pravimo dogodki. Če velja $t(A - B) = 0$ pravimo, da sta dogodka A in B istočasna. Nad afnim prostorom istočasnih dogodkov je s c) definirana evklidska razdalja.

Definicija Galilejevi strukturi $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, t, \rho)$ in $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{t}, \tilde{\rho})$ sta ekvivalentni, če obstaja bijekcija $g : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ tako, da je g afina preslikava, ki ohranja časovnost dogodkov in razdaljo med istočasnimi dogodki. Preslikavi g pravimo Galilejeva transformacija.

Naravna Galilejeva struktura na $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^3$.

Izrek Galilejeva transformacija $(t, P) \mapsto (t', P')$ med dvema naravnima Galilejevima strukturama na $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ je oblike:

$$\begin{aligned} t' &= t + t'_0 \\ P' &= \vec{c}t + Q(P - P_0) + P'_0. \end{aligned}$$

Grupa Galilejevih transformacij. transformaciji.

Vektor hitrosti, pospeška; transformacija vektorja hitrosti in pospeška pri Galilejevi transformaciji.

Sistem materialnih točk.

Princip determiniranosti Trajektorija $\mathbf{P}(t)$ sistema N materialnih točk je v danem koordinatnem sistemu natanko določena z začetnim položajem $\mathbf{P}_0 \in \mathbb{E}^{3N}$ in začetno hitrostjo $\dot{\mathbf{P}}_0 \in \mathbb{R}^{3N}$. To pomeni, da obstaja funkcija interakcije $\mathbf{f}$, tako da velja $\ddot{\mathbf{P}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}})$.

13. 10. 21 **Literatura**

- Aganovič, Veselič, *Uvod v analitičnu mehaniku*, Matematički odjel Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta, Zagreb, 1990 6–10.
- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 1–11.

Princip relativnosti Obstaja tak Galilejev razred koordinatnih sistemov, da je funkcija interakcije invariantna za Galilejeve transformacije. Koordinatnim sistemom iz tega razreda pravimo inercialni koordinatni sistemi.

Posledice principa relativnosti $\underline{f} = \underline{f}(P_i - P_j, \dot{P}_k - \dot{P}_l)$, z besedami:

- a) homogenost časa;
- b) homogenost prostora;
- c) homogenost faznega prostora;
- d) izotropičnost.

Primer $N = 2$.

Primer $N = 1$; prvi Newtonov zakon: v razredu inercialnih koordinatnih sistemov se izolirana materialna točka giblje premočrtno s konstantno brzino.

Princip sorazmernosti Naj bo $\mathcal{P}$ sistem materialnih točk P_i . Za poljuben par točk P_i, P_j iz $\mathcal{P}$, ki tvori zaprt sistem, obstaja, ne glede na vrsto interakcije, pozitivna konstanta k_{ji} tako, da velja $\ddot{P}_i = -k_{ji}\ddot{P}_j$. Za števila k_{ij} velja $k_{ij}k_{jk}k_{ki} = 1$. Števila k_{ij} so neodvisna od koordinatnega sistema.

Tretji Newtonov zakon.

Lema Naj za števila k_{ij} velja

- a) $k_{ij} > 0$
- b) $k_{ji} = 1/k_{ij}$
- c) $k_{ij}k_{jk}k_{ki} = 1$.

Potem obstajajo števila, $m_i > 0$, tako da velja $k_{ij} = m_i/m_j$.

Pojem inercialne mase, pojem sile.

Gravitacijski zakon, gravitacijska masa.

Newtonov eksperiment, enakost inercialne in gravitacijske mase.

Delo, kinetična energija.

Izrek Delo, ki ga opravi sila na materialno točko pri gibanju vzdolž tira, je enako razliki kinetične energije.

20. 10. 21 Potencialna sila, konzervativna sila.

Izrek(Izrek o energiji) Naj bo $\vec{F}$ konzervativna sila. Potem je vsota kinetične in potencialne energije konstanta gibanja.

PREMOČRTNO GIBANJE

Literatura

- Aganovič, Veselič, *Uvod v analitičnu mehaniku*, Matematički odjel Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta, Zagreb, 1990 6-10.
- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 15-22.
- Greiner, W., *Classical Mechanics: Point Particles and Relativity*, Springer, 2004, 229-240.
- Jose, Jorge V. in Saletan, Eugene, *Classical dynamics : a contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998, 6-9, 18-22.
- Landau, L.D., in Lifshitz, E. M., *Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960, 25-29.

Gibanje je premočrtno, če obstaja KS v katerem tir leži na premici.

Neinvariantnost premočrtnega gibanja za Galilejeve transformacije.

Trditev Gibanje je premočrtno $\iff$ obstaja pol O tako da je $\vec{l}(O, P) = \vec{0}$.

Trditev Če je sila zvezna in odvisna samo od položaja, je konzervativna.

Pišimo $\vec{F} = f\vec{i}$ in naj bo $f = f(x)$ zvezna funkcija. Potem je $T + U = E$ integral gibanja in gibanje je integrabilno. Velja

$$t = t_0 + \operatorname{sgn} \dot{x} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}.$$

Kvalitativna analiza gibanja, točka obrata, periodično gibanje, neomejeno gibanje.

Perioda periodičnega gibanja

$$T = \sqrt{2m} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Ravnovesna lega, stabilna, nestabilna ravnovesna lega.

Lema

$$\int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b-u)(u-a)}} = \pi.$$

Primer: harmonični oscilator.

27. 10. 21 Literatura

- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 15-22.
- Greiner, W., *Classical Mechanics: Point Particles and Relativity*, Springer, 2004, 229-240.
- Jose, Jorge V. in Saletan, Eugene, *Classical dynamics : a contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998, 18-22.
- Landau, L.D., in Lifshitz, E. M., *Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960, 25-29.

Primer: izračun periode za $U(x) = \alpha x^2 + \beta x^{-2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Harmonična aproksimacija $T \approx 2\pi\sqrt{m/U''(x_0)}$.

Izokronično gibanje.

Libracijsko gibanje, uvedba nove spremenljivke $x = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\theta$, pisava $\frac{2}{m}(E - U(x)) = (b-x)(x-a)\psi(x) \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\psi(\theta)}$.

Približen izračun periode

$$T \approx \pi\sqrt{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\psi(a)}} + \frac{1}{\sqrt{\psi(b)}} \right).$$

Fazna ravnina, fazni portret.

Lema Za omejeno premočrtno gibanje velja $\frac{dA}{dE} = \frac{1}{m}T$. Tu je A ploščina pripadajočega lika v fazni ravnini, T pa perioda gibanja.

Primer: harmonično gibanje.

Premočrtno gibanje pod vplivom nekonzervativne sile.

Primer: dušeno nihanje; disipacija mehanske energije.

GIBANJE PO KRIVULJI

Ločna dolžina, ukrivljenost.

Tangencialni pospešek, normalni pospešek; $\vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_t + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_n$.

Newtonova enačba $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{S}$, sila vezi $\vec{S}$.

Gibanje po negladki krivulji.

Gibanje po gladki krivulji

Sila vezi, delo sile vezi, idealna vez ($\vec{S} \cdot \vec{e}_t = 0$); redukcija na premočrtno gibanje.

3. 11. 21 Primer: matematično nihalo.

Ocena nihajnega časa matematičnega nihala:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \leq T \leq \frac{1}{\cos\frac{\theta_0}{2}} 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Libracijska aproksimacija periode matematičnega nihala

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{\theta_0}{\sin\theta_0}}.$$

Harmonična aproksimacija periode gibanja po krivulji.

GIBANJE V POLJU CENTRALNE SILE

Literatura

- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 76-82, 85-90.

- Greiner, W., *Classical Mechanics: Point Particles and Relativity*, Springer, 2004, 246-257.
- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 34-42.

Definicija Sila $\vec{F}$ je centralna, če obstaja točka O (center sile) tako, da velja $\vec{F} = F(|P - O|)(P - O)/|P - O|$.

Izrek Konzervativna sila je centralna $\iff$ obstaja točka O tako, da je $\vec{l}(O, P)$ konstanten.

Izrek Gibanje v polju centralnih sil je ravninsko. Tir leži v ravnini, ki gre skozi O in ima normalo v smeri $\vec{l}(O, P)$.

Kinematika gibanja v polarnem koordinatnem sistemu.

Ploščinska hitrost, zveza $l = mC_0$, kjer je C_0 dvojna ploščinska hitrost.

Izrek Gibanje v polju centralne sile ima dve konstanti gibanja, energijo in ploščinsko hitrost.

Keplerjevi zakoni; zgodovinski oris, Tycho Brahe (1546-1601), Johannes Kepler (1571-1630), Isaac Newton (1643-1727);

10. 11. 21 Literatura

- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 90-102.
- Jose, Jorge V. in Saletan, Eugene, *Classical dynamics : a contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998, 77-92.

Trditev Če je ploščinska hitrost konstantna, je obodni pospešek enak nič.

Binetova formula

$$a_r = -C_0^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right).$$

Trditev Če je tir elipsa, je radialni pospešek obratno sorazmeren kvadratu oddaljenosti do centra sil.

Trditev Kvocient C_0^2/p je konstanten za vse planete v osončju,

Redukcija na premočrtno gibanje koordinate r , efektivni potencial $U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$.

Določitev trajektorije s kvadraturami.

Določitev tira $\theta = \theta(r)$

$$\theta = \theta_0 + \operatorname{sgn} \dot{r} \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E_0 - U(r)}}.$$

Kvalitativna analiza gibanja v polju centralne sile, apsidni radij, pericenter, apocenter.

Primer: gibanje v polju gravitacijske sile $V(r) = -\frac{\gamma}{r}$. Graf efektivnega potenciala.

Tir gibanja v polju gravitacijske sile.

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0 + \pi/2)}, \quad p = \frac{l^2}{m\gamma}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\gamma^2}},$$

kjer je θ_0 polarni kot do lokalnega minimuma efektivnega potenciala.

Kvalitativna analiza gibanja v polju centralne sile, apsidni radij, pericenter, apocenter, apsidni kot $\Delta\theta$.

Trditev Tir je simetričen glede na apsidni žarek.

Trditev Tir se dotika apsidnih krožnic.

Pogoj zaprtosti tira $W = \Delta\theta/\pi \in \mathbb{Q}$.

Velja: če omejeni tir ni zaprt je gosta množica v kolobarju med apsidnima radijema.

Bertrandov izrek: edina potenciala za katera je vsak omejen tir v okolici krožnega tira zaprt sta gravitacijski in Hookov.

Literatura

- Aganovič, Veselič, *Uvod v analitičku mehaniku*, Matematički odjel Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta, Zagreb, 1990 35-36.

Definicija Soredje $\varphi(t, P)$ se giblje glede na soredje $\varphi'(t', P')$, če obstaja trojica (P_0, P'_0, Q) , $P_0 \in \mathbb{E}$, $P'_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$, $Q : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$, tako da velja $t' = t$ in $P' = P'_0(t) + Q(t)(P - P_0)$.

Pojma AKS(t', P'), RKS(t, P).

Translacijsko gibanje, rotacijsko gibanje.

Trditev Rotacijski del gibanja je neodvisen od izbire trojice.

Translatorna hitrost, rotacijska hitrost, relativna hitrost.

Absolutni, relativni koordinatni sistem; korespondenca med vektorji RKS in AKS.

Trditev $Q^T \dot{Q}$ je poševno simetrični tenzor.

Trditev Naj bo W poševno simetrični tenzor iz trirazsežnega vektorskega prostora $\mathcal{V}$ v $\mathcal{V}$. Potem obstaja vektor $\vec{\omega} \in \mathcal{V}$ tako, da je $W\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}$ za vsak $\vec{a} \in \mathcal{V}$. Vektorju $\vec{\omega}$ pravimo osni vektor tenzorja W .

Trditev Naj bo W poševno simetričen tenzor in $\vec{\omega}$ pripadajoči osni vektor. Potem $W_{ij} = -e_{ijk}\omega_k$ in $\omega_k = -\frac{1}{2}e_{ijk}W_{ij}$.

Trditev Algebra poševno simetričnih tenzorjev nad $\mathcal{V}$ z operacijama vsote in komutatorskega produkta je izomorfna algebri $(\mathcal{V}, +, \times)$.

Liejeve algebre.

Trditev Naj bo W konstanten poševno simetričen tenzor. Potem je $e^W \in SO(3)$.

23. 11. 21 **Trditev** Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tri med seboj linearno neodvisni vektorji in $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^3)$. Potem

$$\det A = \frac{(A\vec{a}, A\vec{b}, A\vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}.$$

Trditev Naj bo $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^3)$ neizrojena. Potem

$$(A\vec{a}) \times (A\vec{b}) = (\det A) A^{-T}(\vec{a} \times \vec{b}) = A^*(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Posledica Naj bo $Q \in SO(3)$. Potem $Q(\vec{a} \times \vec{b}) = (Q\vec{a}) \times (Q\vec{b})$.

Definicija Osnemu vektorju $\vec{\omega}$ tenzorja $Q^T \dot{Q}$ pravimo rotacijski vektor. Vektor kotne hitrosti rotacije Q je $\vec{\omega}' = Q\vec{\omega}$.

Trditev Osní vektor poševno simetričnega tenzorja $\dot{Q}Q^T$ je vektor kotne hitrosti rotacije Q .

Trditev Vektor kotne hitrosti rotacije $Q = R(\vec{e}, \varphi)$ za kot $\varphi = \varphi(t)$ okrog stalne osi $\vec{e}$ je $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}$.

Trditev Naj bo W poševno simetričen tenzor s konstantnim osnim vektorjem $\vec{e}$. Potem je $Q = e^{\theta W}$ rotacija okrog stalne osi $\vec{e}$ za kot $\theta = \theta(t)$.

Trditev Naj bo $Q = R(\vec{e}, \varphi)$ rotacija okoli smeri $\vec{e}$ za kot φ , $|\vec{e}| = 1$. Potem

$$Q = \cos \varphi I + (1 - \cos \varphi)\vec{e} \otimes \vec{e} + \sin \varphi W,$$

kjer je W poševno simetrični tenzor z osnim vektorjem $\vec{e}$.

Trditev

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(\text{Sl } Q - 1).$$

Velja Vektor kotne hitrosti rotacije $R(\vec{e}, \varphi)$ je

$$\vec{\omega}' = \dot{\varphi}\vec{e} + \sin \varphi \dot{\vec{e}} + (1 - \cos \varphi)\vec{e} \times \dot{\vec{e}}.$$

Trditev $(Q\vec{u})' = Q\dot{\vec{u}} + \vec{\omega}' \times \vec{u}'$.

Absolutni, relativni koordinatni sistem; pisava $\vec{\zeta} = P - P_0$, $\vec{\zeta}' = Q\vec{\zeta}$, $P' = P'_0 + Q\vec{\zeta} = P'_0 + \vec{\zeta}'$.
Korespondenca med RKS in AKS.

Relativna hitrost $\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{\vec{\zeta}}$, $\vec{v}'_{\text{rel}} = Q\vec{v}_{\text{rel}} = (\dot{\vec{\zeta}})'$, povezava med absolutno in relativno hitrostjo

$$\vec{v}' = \vec{v}'_0 + Q(\vec{\omega} \times \vec{\zeta} + \vec{v}_{\text{rel}}) = \vec{v}'_0 + \vec{\omega}' \times \vec{\zeta}' + \vec{v}'_{\text{rel}}.$$

Relativni pospešek $\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{\vec{\zeta}} = \ddot{\zeta}^i \vec{e}_i$, $\vec{a}'_{\text{rel}} = \ddot{\zeta}'^i \vec{e}'_i$, povezava med absolutnim in relativnim pospeškom

$$\vec{a}' = \vec{a}'_0 + Q(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}}) = \vec{a}'_0 + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{\zeta}') + \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{\zeta}' + 2\vec{\omega}' \times \vec{v}'_{\text{rel}} + \vec{a}'_{\text{rel}}.$$

Sistemi, Coriolisov, centrifugalni pospešek.

Newtonova enačba v absolutnem koordinatnem sistemu $m\vec{a}' = \vec{F}'$, v relativnem koordinatnem sistemu

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}},$$

kjer je $\vec{F} = Q^T \vec{F}'$ in $\vec{a}_0 = Q^T \vec{a}'_0$.

Inercijska sila, centrifugalna sila, inercijska sila rotacije, Coriolisova sila.

1. 12. 21 **Trditev** Če je $\vec{F}'$ potencialna sila, je tudi $\vec{F}$ potencialna.
Primer: Foucaultovo nihalo.

Literatura

- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 164-166.
- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 3-38.

SISTEM MATERIALNIH TOČK

Masno središče $P_* = O + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O)$.

Trditev Masno središče je neodvisno od izbire koordinatnega izhodišča O .

Notranje sile, zunanje sile.

Enačba gibanja masnega središča $m\ddot{P}_* = \vec{F}$.

Primer: poševni met.

Vrtilna količina $\vec{L} = \vec{L}(O) = \sum_{i=1}^N \vec{l}(O, P_i)$.

Navor zunanjih sil $\vec{N} = \vec{N}(O) = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \times \vec{F}_i$.

Izrek o vrtilni količini: $\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{N} + \vec{N}_n$.

Centralnost notranjih sil:

$$\vec{F}_{ji} = \vec{F}_{ji}(P_i, P_j) = F_{ji}(|P_i - P_j|) \frac{P_i - P_j}{|P_i - P_j|}.$$

Izrek o vrtilni količini: Če so notranje sile centralne, je odvod vrtilne količine okoli fiksnega pola enak navoru zunanjih sil okoli tega pola.

8. 12. 21 **Literatura**

- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 66-73.
- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 5-11.

Odvisnost vrtilne količine od pola : $\vec{L}(P_0) = \vec{L}(O) + (O - P_0) \times m\dot{P}_*$.

Pisava: $P_i = P_0 + \vec{\zeta}_i$

Vrtilna količina relativnega gibanja okoli P_0 : $\vec{L} = \vec{L}(P_0) = \sum_i \vec{\zeta}_i \times m_i \dot{\vec{\zeta}}_i$.

Trditev $\vec{L}(P_0) = (P_* - P_0) \times m\dot{P}_0 + \vec{L}(P_0)$.

Posebna primera : P_0 fiksna točka, $P_0 = P_*$.

Trditev $\frac{d}{dt} \vec{L}(P_0) = \vec{N}(P_0) - m\dot{P}_0 \times \dot{P}_*$.

Trditev $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{N}(P_0) - (P_* - P_0) \times m\ddot{P}_0$.

Posebna primera : $P_0 = P_*, \ddot{P}_0 = \vec{0} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{N}(P_0)$.

Odvisnost kinetične energije od izbire centra gibanja.

Königov izrek $T = T_{\text{rel}} + \frac{1}{2}m\left|\dot{P}_*\right|^2$.

Potencial notrajnih sil

$$U_{ji}(P_i, P_j) = - \int_{r_0}^{|P_i - P_j|} F_{ji}(r) dr, \quad U = \sum_{i < j} U_{ji}.$$

Energijski princip $\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \dot{P}_i$.

Zaprta sistem.

Zakon o ohranitvi gibalne količine, vrtilne količine.

Primer: problem dveh teles.

15. 12. 21 Literatura

- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 44-50.
- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 73-79, 190-215.

TOGO TELO

Definicija Gibanje $t \rightarrow P(t)$ točk sistema $\{\mathcal{P}\}$ je togo, če za poljubni točki $P_1, P_2 \in \{\mathcal{P}\}$ velja $|P_1(t) - P_2(t)| = \text{konst.}$

Opis togega gibanja: rotacija + translacija.

Izrek Izometrija je afina preslikava.

Opis togega gibanja kot relativno gibanje: telesni KS = položaj v $t = 0$, prostorski položaj = trenutni položaj. Prostorski KS(PKS), telesni KS(TKS).

Pisava $P' = P(t)$, $P = P(t = 0)$.

Posplošitev sistema materialnih točk na kontinuum mnogo točk, pojem togega telesa, masa.

Izrek Za masno središče telesa $\mathcal{B}$ velja

$$\frac{d}{dt}P'_* = (\dot{P}')_* \quad \frac{d}{dt}\dot{P}'_* = (\ddot{P}')_*.$$

Tenzorski produkt: tenzorski produkt dveh vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je linearna preslikava $\vec{a} \otimes \vec{b}$ definirana z $\vec{r} \mapsto (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{r} = (\vec{b} \cdot \vec{r})\vec{a}$.

Trditev Velja

a) $(\underline{A})\vec{a} \otimes \vec{b} = (\underline{A}\vec{a}) \otimes \vec{b};$

b) $(\vec{a} \otimes \vec{b})\underline{A} = \vec{a} \otimes (\underline{A}^T\vec{b});$

c) $(\vec{a} \otimes \vec{b})^T = \vec{b} \otimes \vec{a}.$

Trditev Naj bo $\{\vec{e}_i, i = 1, \dots, n\}$ ortonormirana baza vektorskega prostora $\mathcal{V}$. Potem je $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, i, j = 1, \dots, n\}$ baza $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.

Vrtilna količina relativnega gibanja v absolutnem koordinatnem sistemu $\vec{\mathcal{L}}'$.

Prostorski vztrajnostni tenzor $\underline{J}'$.

Telesni vztrajnostni tenzor $\underline{J}$, zveza $\underline{J}' = Q\underline{J}Q^T$.

Velja $\vec{\mathcal{L}}' = Q\underline{J}\vec{\omega}$.

Vztrajnostni moment $J_e = \vec{e} \cdot \underline{J}\vec{e}$ okoli osi $\vec{e}$, deviacijski momenti $\underline{D}$.

Trditev Tenzor $\underline{J}$ je nenegativen. Če telo ni tanka palica, je pozitivno definiten.

23. 12. 20 Literatura

- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 220-226.
- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 205-213.
- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 249-252.
- Jose, Jorge V. in Saletan, Eugene, *Classical dynamics : a contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998, 526-533.

Diagonalizacija vztrajnostnega tenzorja, glavne osi, glavni momenti.

Trditev Prehod na novo bazo; $\vec{e}_i^* = \alpha_{ij}\vec{e}_j \implies J_{ij}^* = \alpha_{ik}\alpha_{jl}J_{kl}$.

Komponentni zapis vztrajnostnega tenzorja.

Izrek (Steiner) $\underline{J}(P_0) = \underline{J}(P_*) + m|P_0 - P_*|^2 \underline{I} - m(P_0 - P_*) \otimes (P_0 - P_*)$.

Trditev Normala na ravnino zrcalne simetrije skozi P_0 je glavna smer vztrajnostnega tenzorja $\underline{J}(P_0)$.

Trditev Če ima telo dve ravnini zrcalne simetrije skozi P_0 , je presek ravnin simetrij glavna smer vztrajnostnega tenzorja $\underline{J}(P_0)$.

Primer: vztrajnostni tenzor valja.

Kinetična energija togega telesa $T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \underline{J}(P_*)\vec{\omega}$.

Dinamika togega telesa

Aksiomi gibanja togega telesa: dinamične enačbe togega telesa so:

- enačba gibanja masnega središča: $m\ddot{P}_* = \vec{F}'$;
- izrek o vrtilni količini: $\frac{d\vec{L}'(P'_*)}{dt} = \vec{N}'(P'_*)$;
- $\vec{N}'(O') = \vec{N}'(P'_0) + (P'_0 - O') \times \vec{F}'$.

Eulerjeva dinamična enačba $\underline{J}_* \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \underline{J}_* \vec{\omega} = \vec{N}_*$.

Komponentni zapis Eulerjeve dinamične enačbe.

- v lastnem koordinatnem sistemu vztrajnostnega tenzorja;
- v koordinatnem sistemu s koordinatno osjo v smeri stalne osi rotacije.

$$N_1 = J_{13}\ddot{\varphi} - J_{23}\dot{\varphi}^2$$

$$N_2 = J_{23}\ddot{\varphi} + J_{13}\dot{\varphi}^2$$

$$N_3 = J_{33}\ddot{\varphi}$$

29. 12. 21 Literatura

- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 213-218

Izrek Naj bo P_0 fiksna točka ali masno središče. Potem je

$$\underline{J}(P_0)\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \underline{J}(P_0)\vec{\omega} = \vec{N}(P_0).$$

Ekvipolentnost sistema sil.

Dva ekvipolentna sistema sil imata enak dinamični efekt na togo telo.

Sistem sil; točkovne sile, volumenske sile.

Trditev Homogena sila je ekvipolentna svoji rezultanti s prijemališčem v masnem središču.

Izrek o delu: $\frac{dT}{dt} = \vec{v}' \cdot \vec{F}' + \vec{\omega}' \cdot \vec{N}'(P'_*)$.

Trditev (Izrek o energiji) Če je sistem sil na togo telo konzervativen, je vsota kinetične in potencialne energije konstanta gibanja.

Definicija Telo $\mathcal{B}_1$ se kotali po telesu $\mathcal{B}_2$, če se v dotikališču njuni hitrosti sovpadata.

Primer:

- kotaljenje valja po strmini;
- kotaljenje z drsenjem.

Primer : vrtenje telesa okrog stalne osi, določitev sil v ležajih.

Prosta vrtavka

Posebni primer: enakomerna rotacija okrog glavnih osi.

Osnosimetrična prosta vrtavka: analitična obravnava; precesija vektorja kotne hitrosti okoli osi simetrije.

5. 1. 22 Literatura

- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 213-218

Binetov elipsoid, presek Binetovega elipsoida s sfero; gibanje vektorja vrtilne količine po Binetovem elipsoidu.

Stabilnost enakomerne rotacije.

Eulerjevi koti

φ - precesija, θ - nutacija, ψ - kot lastne rotacije.

Eulerjeva rotacija $R = R(\vec{k}, \vec{i}, \vec{k}, \psi, \theta, \varphi) := R(\vec{k}_2, \psi)R(\vec{i}_1, \theta)R(\vec{k}, \varphi)$; $\vec{i}_1 = R(\vec{k}, \varphi)\vec{i}$, $\vec{k}_2 = R(\vec{i}_1, \theta)\vec{k}$.

Lema $R(R(\vec{e}, \varphi)\vec{f}, \theta)R(\vec{e}, \varphi) = R(\vec{e}, \varphi)R(\vec{f}, \theta)$.

Definicija Za dane osi $\vec{f}_k$ in kote φ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ pišemo $\vec{f}_k^{(0)} = \vec{f}_k$ in $\vec{f}_k^{(l)} = R(\vec{f}_l^{(l-1)}, \varphi_l)\vec{f}_k^{(l-1)}$ za $k = l + 1, \dots, n$. Definiramo kompozitum rotacij okrog zarotiranih osi

$$R(\vec{f}_n, \dots, \vec{f}_1, \varphi_n, \dots, \varphi_1) = R(\vec{f}_n^{(n-1)}, \varphi_n) \circ \dots \circ R(\vec{f}_2^{(1)}, \varphi_2)R(\vec{f}_1, \varphi_1).$$

Izrek

$$R(\vec{f}_n, \dots, \vec{f}_1, \varphi_n, \dots, \varphi_1) = R(\vec{f}_1, \varphi_1) \circ \dots \circ R(\vec{f}_{n-1}, \varphi_{n-1})R(\vec{f}_n, \varphi_n).$$

Primer: Eulerjeva rotacija

$$R(\vec{k}, \vec{i}, \vec{k}, \psi, \theta, \varphi) = R(\vec{k}_2, \psi)R(\vec{i}_1, \theta)R(\vec{k}, \varphi) = R(\vec{k}, \varphi)R(\vec{i}, \theta)R(\vec{k}, \psi).$$

Izrek Vsako rotacijo Q , z izjemo rotacije okrog osi $\vec{k}$, moremo enolično zapisati kot Eulerjevo rotacijo $R(\vec{k}, \vec{i}, \vec{k}; \psi, \theta, \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\psi \in [0, 2\pi)$.

Izrek Vektor kotne hitrosti rotacije $R(\vec{f}_n, \dots, \vec{f}_1, \varphi_n, \dots, \varphi_1)$ je $\vec{\omega}' = \sum_k \dot{\varphi}_k \vec{f}_k^{(k-1)}$. Z besedami, vektor kotne hitrosti sestavljene rotacije je vsota kotnih hitrosti okoli zarotiranih osi rotacij.

Primer: vektor kotne hitrosti Eulerjeve rotacije v prostorskih baznih vektorjih $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je

$$\vec{\omega}' = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)\vec{i} + (\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi)\vec{j} + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})\vec{k}.$$

Osni vektor rotacije Q je nasprotno enak vektorju kotne hitrost rotacije Q^T ,

Izrek $R(\vec{k}, \vec{i}, \vec{k}; \psi, \theta, \varphi)^T = R(\vec{k}, \vec{i}, \vec{k}; -\varphi, -\theta, -\psi)$.

Trditev Osni vektor Eulerjeve rotacije zapisan v bazi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)\vec{e}_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)\vec{e}_2 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})\vec{e}_3.$$

Posledica Vektor kotne hitrosti Eulerjeve rotacije zapisan v bazi $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ je

$$\vec{\omega}' = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)\vec{e}'_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)\vec{e}'_2 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})\vec{e}'_3.$$

Trditev Ne obstaja parameterizacija $\mathbf{y}$ grupe $SO(3)$ tako, da je $\vec{\omega}' = \dot{\mathbf{y}}$.

Simetrična(Lagrangeeva) vrtavka

Integrali gibanja : komponenta vrtilne količine okoli navpičnice, komponenta vrtilne količine v telesnem koordinatnem sistemu okoli osi simetrije in vsota kinetične in potencialne energije.

12. 1. 22 Literatura

- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 219-225

Analitični zapis konstant gibanja

$$\begin{aligned} J_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) &= J_1 a, \\ \dot{\varphi} (J_1 \sin^2 \theta + J_3 \cos^2 \theta) + J_3 \dot{\psi} \cos \theta &= J_1 b, \\ \frac{1}{2} J_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J_3 (\omega_3)^2 + mgl \cos \theta &= E. \end{aligned}$$

Redukcija gibanja na premočrtno gibanje kota nutacije.

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2, \quad \alpha = \frac{2E'}{J_1}, \quad \beta = \frac{2mgl}{J_1}.$$

Kvalitativni opis gibanja v odvisnosti od konstant gibanja.

Klasična naloga vrtavke; $\dot{\varphi}(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$, $u_0 = \frac{b}{a}$, $\alpha = \beta u_0$.

Hitra vrtavka

$$\frac{a^2}{\beta} = \frac{J_3}{J_1} \frac{\frac{1}{2} J_3 \omega_3^2}{mgl} \gg 1.$$

Razpon nutacije je $\frac{\beta \sin^2 \theta_0}{a^2}$.

Frekvenca nutacije je a .

Kotna hitrost precesije, psevdo regularna precesija.