

Indukcija

1. Dokaži, da za vsa naravna števila n veljajo enakosti:

- (a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
- (b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- (c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,
- (d) $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^n = 2^n(2n - 2) + 2$.
- (e) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

2. Dokaži, da za vsa naravna števila n velja

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

3. Dokaži Bernoullijevo neenakost: za vsako naravno število n in za vsako realno število $a > -1$ velja

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

4. Dokaži, da veljajo neenakosti:

- (a) $2^n > n$ za $n \in \mathbb{N}$,
- (b) $2^n < n!$ za $n \geq 4$,
- (c) $n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n$ za $n \in \mathbb{N}$.

5. Dokaži, da je za vsako naravno število n izraz $n^5 - n$ deljiv s 5.

6. Dokaži, da je za vsako naravno število n izraz $13^{2n} + 6$ deljiv s 7.

7. Dokaži, da je za vsako naravno število n izraz $5^{n-1} + 2^n$ deljiv s 3.

8. Dokaži, da je za $n \geq 4$ število diagonal v n -kotniku enako $\frac{n(n-3)}{2}$.

9. Dokaži, da n paroma nevzporednih premic v ravnini, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.