

1. Naj bo x pozitivno iracionalno število. Naj bo q poljubno neničelno racionalno število.
Dokaži, da so števila $\sqrt{x}$, $q + x$, qx tudi iracionalna.

$z \in \mathbb{Q}$ je racionalno število: $z = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$
 $x \notin \mathbb{Q}$ je iracionalno število

① $z + x \notin \mathbb{Q}$

Dokažemo s protislovjem: $z + x \in \mathbb{Q}$ ✓

$$z + x = \frac{p}{s}$$

$$\downarrow$$
$$\frac{m}{n} + x = \frac{p}{s}$$

$$\Rightarrow x = \frac{p}{s} - \frac{m}{n} = \frac{pn - ms}{sn}$$

$$x \in \mathbb{Q}$$

Ugotovitev: Če iracionalnemu številu pristevamo racionalno število, dobimo iracionalno število.

② $q \cdot x \notin \mathbb{Q}$ za $q \neq 0$:

S protislovjem: Recimo, da $(q \cdot x \in \mathbb{Q})$.

$$\frac{m}{n} \cdot x = \frac{p}{s} \cdot \frac{n}{m}$$

$$\implies x = \frac{pn}{ms} \in \mathbb{Q} \quad \text{✗}$$

Ugotovitev: Če iracionalno število pomnožimo z racionalnim nen ničelnim številom, dobimo iracionalno št.

③ $x > 0$, $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$:

Recimo, da je $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$: $\sqrt{x} = \frac{m}{n} \implies$

$$x = \frac{m^2}{n^2} \in \mathbb{Q} \quad \text{✗} \quad (x \notin \mathbb{Q})$$

Ugotovitev: Koren (poljubne stopnje) irac. št. je irac. št.

2. Dokaži, da je število $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ iracionalno.

Recimo, da je $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{m}{n} \{ \dots \}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$5 + 2\sqrt{6} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q} \\ \in \\ \textcircled{2} \end{array} \begin{array}{c} \mathbb{Q} \\ \notin \\ \textcircled{\sqrt{6}} \end{array} = \begin{array}{c} \mathbb{Q} \\ \in \\ \textcircled{\frac{m^2}{n^2} - 5} \end{array}$$

Če je $\sqrt{6}$ iracionalno, imamo na levi produkt nenič. rac. št. & irac. št., torej je na levi irac. št. (prejstaja naloga).

Dokažimo, da je $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$:

Recimo, da je $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$

Predpostavimo lahko, da je $\frac{m}{n}$ okrajšan,

torej m in n nimata skupnih
 deliteljev (m in n sta tuji števili).

$$\sqrt{6} = \frac{m}{n} \Big|^2 \Rightarrow 6 = \frac{m^2}{n^2} \cdot n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{6n^2 = m^2} \quad \text{☺} \quad 6 = 3 \cdot 2$$

Število 3 je prostevilo, ki deli
levo stran ☺. Potem 3 deli tudi
desno stran. Če bi število 3 ne
delilo m , ne bi delilo niti m^2 .
(pri kvadriranju ne dobimo novih
prafaktorjev).

Sklepamo, da je $m = 3k$:

$$\text{☺} \Leftrightarrow 6n^2 = 9k^2 \quad \Big| : 3$$

$$2n^2 = 3k^2 \Rightarrow$$

Desna strana je deljiva s 3 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 3 \text{ deli } n^2 \Rightarrow 3 \text{ deli } n$$

$$\dots \text{ in } \dots \Rightarrow 3 \text{ deli } n \text{ in } n$$

$\Rightarrow n$ in n imata skupni faktor

~~X~~

TRDITEV Za $n \in \mathbb{N}$ velja, da je
bodisi n popolni kvadrat ($n = m^2$
za nek $m \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} = m$), bodisi je

$$\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}.$$

4. Poišči vse rešitve naslednjih enačb:

(a) $x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 5x + 7$,

(b) $\sqrt{13x^2 - 36}$ = $2x$.

(a) $0 = x^2 + 7x + 6 = (x+1)(x+6) \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -6$

(b) kvadriramo: $13x^2 - 36 = 4x^2$

$$9x^2 = 36 \quad \{ : 9$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Pri kvadriranju lahko pridobimo
odvečine rešitve, zato naredimo preizkus:

1) $x = 2$ ✓: $\sqrt{13 \cdot 4 - 36} = \sqrt{16} = 4$

$2x = 4$

↙ $\sqrt{\dots} \geq 0$

2) $x = -2 \Rightarrow$ $2x = -4$ $\stackrel{?}{=} \sqrt{\dots}$ ✗

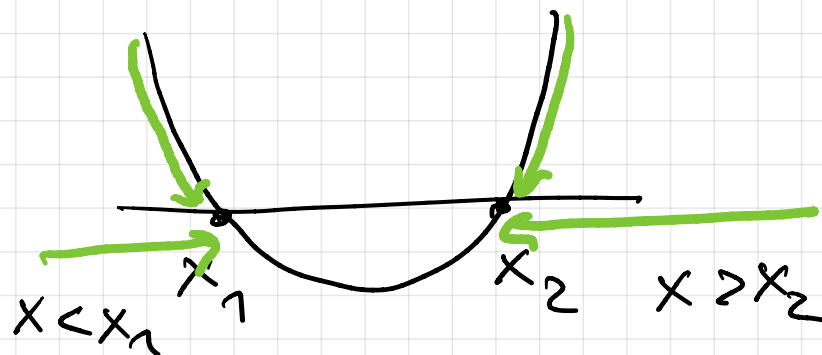
5. Reši naslednji neenačbi:

(a) $x^2 - 1 > -x - 4x$,

(b) $\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 1 > 0$.

(a) $x^2 + 5x - 1 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$



$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$R: x < \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \text{ ali } x > \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$$

(b) $\sqrt{x^2 + 1} > 1 - 2x$ (*) $x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1}$ obstaja

Leva stran je vedno nenegativna.
Če je desna stran negativna,
neenačba drži.

$$\textcircled{1} \quad \underline{1 - 2x < 0} \iff 1 < 2x \iff \underline{\frac{1}{2} < x}$$

$$R_1 = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{x \leq \frac{1}{2}}: 1 - 2x \geq 0$$

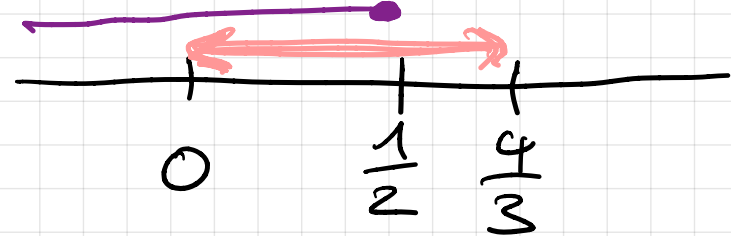
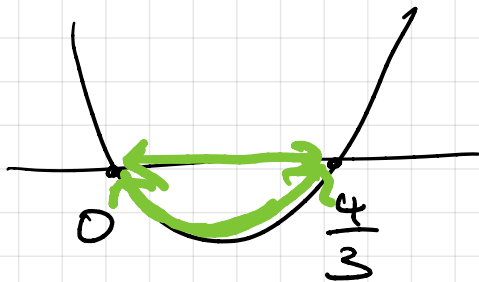
Neenačba $\textcircled{*}$ ima nenegativni obe strani, zato jo lahko kvadriramo.

POJASVILLO: $a, b \geq 0: a \geq b \iff a^2 \geq b^2$

$$x^2 + 1 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$0 \geq 3x^2 - 4x = 3x\left(x - \frac{4}{3}\right) \quad x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}$$

$$\underline{x \in \left(0, \frac{4}{3}\right)}$$



$$R_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

$$R = R_1 \cup R_2 = \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] = \underline{(0, \infty)}$$

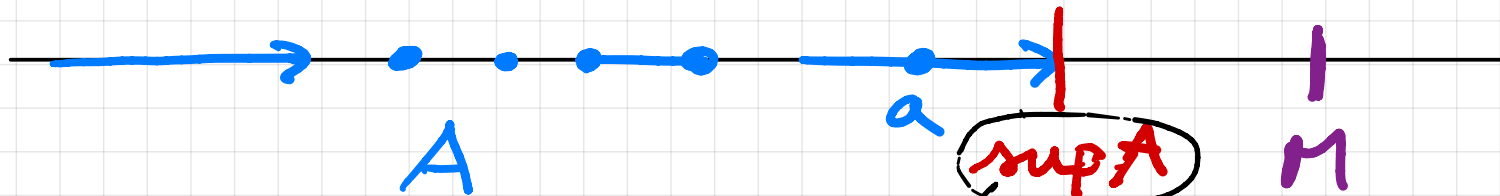
8. Podana je množica

$$A = \left\{ \frac{2n-1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

V primeru, da obstajajo $\min A$, $\max A$, $\inf A$ in $\sup A$, jih določi.

TRDITEV Če je $A \subset \mathbb{R}$ neprazna množica, ki je navzgor/ navzdol omejena, potem ima natančno zgornjo/spodnjo mejo ($\sup A / \inf A$).

A navzgor omejena: $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A : a \leq M$
↙ zgornja meja za A



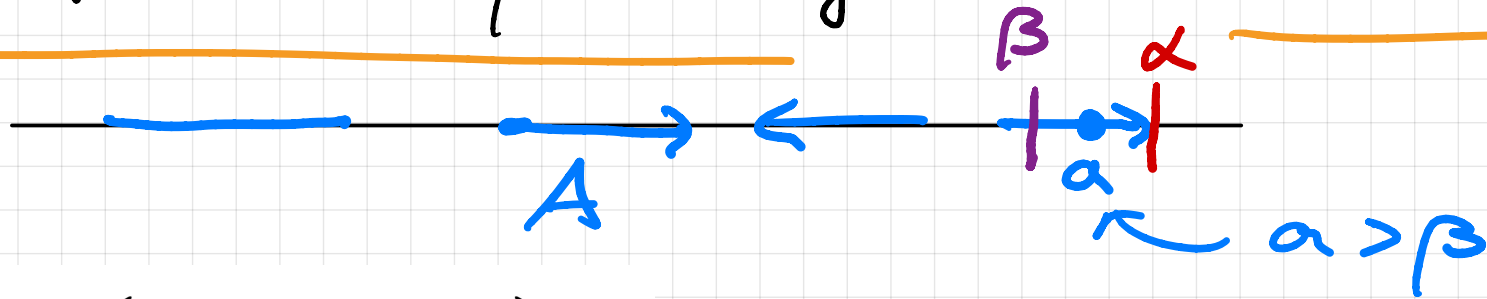
"supremum"

najmanjša (natanna)
zgornja meja

Če ima A največji element $\max A \in A$, potem $\max A = \sup A$

Kako proverimo, da je $\alpha = \sup A$?

- ① α je gornja meja: $\forall a \in A: a \leq \alpha$
- ② Ce je $\beta < \alpha$, potem $\exists a \in A$, da je $a > \beta$.
($\forall$ stevilo β manjše od α ni več zg. meja).



$$A = \left\{ \frac{2n-1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}:$$

$$a \in A, a = \frac{2n-1}{2n+1} < 1$$

↑
gornja meja za A

↑
števci in imenovalci
sta pozitivna, štev. < imen.

$$A = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \dots \right\}$$

Ali je $\frac{1}{3} = \min A$?

• $\frac{1}{3} \in A$ ✓

• $\frac{1}{3} \leq \frac{2n-1}{2n+1} \cdot 3(2n+1) \Leftrightarrow 2n+1 \leq 6n-3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4 \leq 4n \Leftrightarrow 1 \leq n$ ✓

Sklep $\min A = \inf A = \frac{1}{3}$

$\sup A$: 1 rigorozna meja za A

$$\frac{2n-1}{2n+1} = \frac{2n+1-2}{2n+1} = 1 - \frac{2}{2n+1}$$

se manjša 2
večanjem n
in se bliža 0.

Dokazimo, da je $1 = \sup A$.

① 1 je rigorozna meja ✓

② $\beta < 1$: $\exists a \in A, a > \beta$

$$\alpha = \frac{2n-1}{2n+1} \stackrel{?}{>} \beta \quad \left\{ \cdot \underbrace{(2n+1)}_{\substack{0 \\ \vee}} \right\} \Leftrightarrow 2n-1 \stackrel{?}{>} \beta(2n+1)$$

$$2n - 2\beta n \stackrel{?}{>} 1 + \beta \Leftrightarrow 2n(1-\beta) \stackrel{?}{>} 1 + \beta \left\{ 2(1-\beta) \right.$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1+\beta}{2(1-\beta)}$$

ker je $\beta < 1$, je $1-\beta > 0$

→ Taka naravna števila n obstajajo, ker je $\mathbb{N}$ navzgor neomejena.

$1 = \sup A$, $\max A$ ne obstaja.

Če $\nexists \max A \Rightarrow \sup A = \max A = 1 \notin A$.

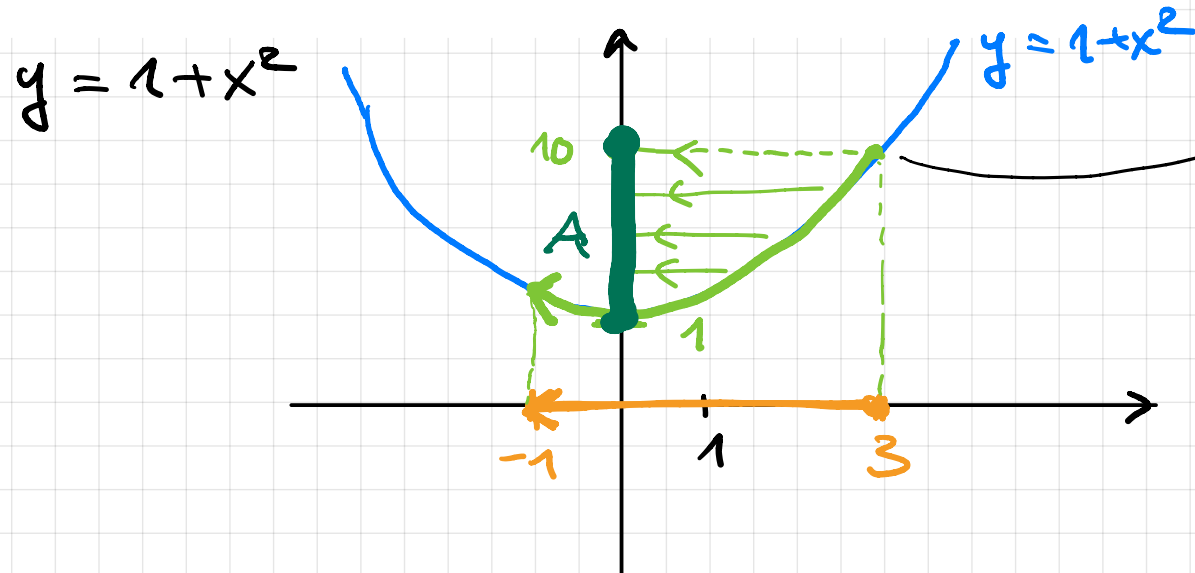
$(1 \neq \frac{2n-1}{2n+1} \text{ za nobeno } n \in \mathbb{N})$

"obstaja"

9. Podana je množica

$$A = \{1 + x^2 : x \in (-1, 3]\}.$$

V primeru, da obstajajo $\min A$, $\max A$, $\inf A$ in $\sup A$, jih določi.



$$1 + x^2 = 10$$



$$x = 3$$

$$A = [1, 10]$$

$$\begin{aligned} \min A &= 1 = \inf A \\ \max A &= 10 = \sup A \end{aligned}$$

6. Reši naslednje enačbe:

(a) $|x + 1| = 3$,

(b) $|1 - |x + 2|| = 1$.

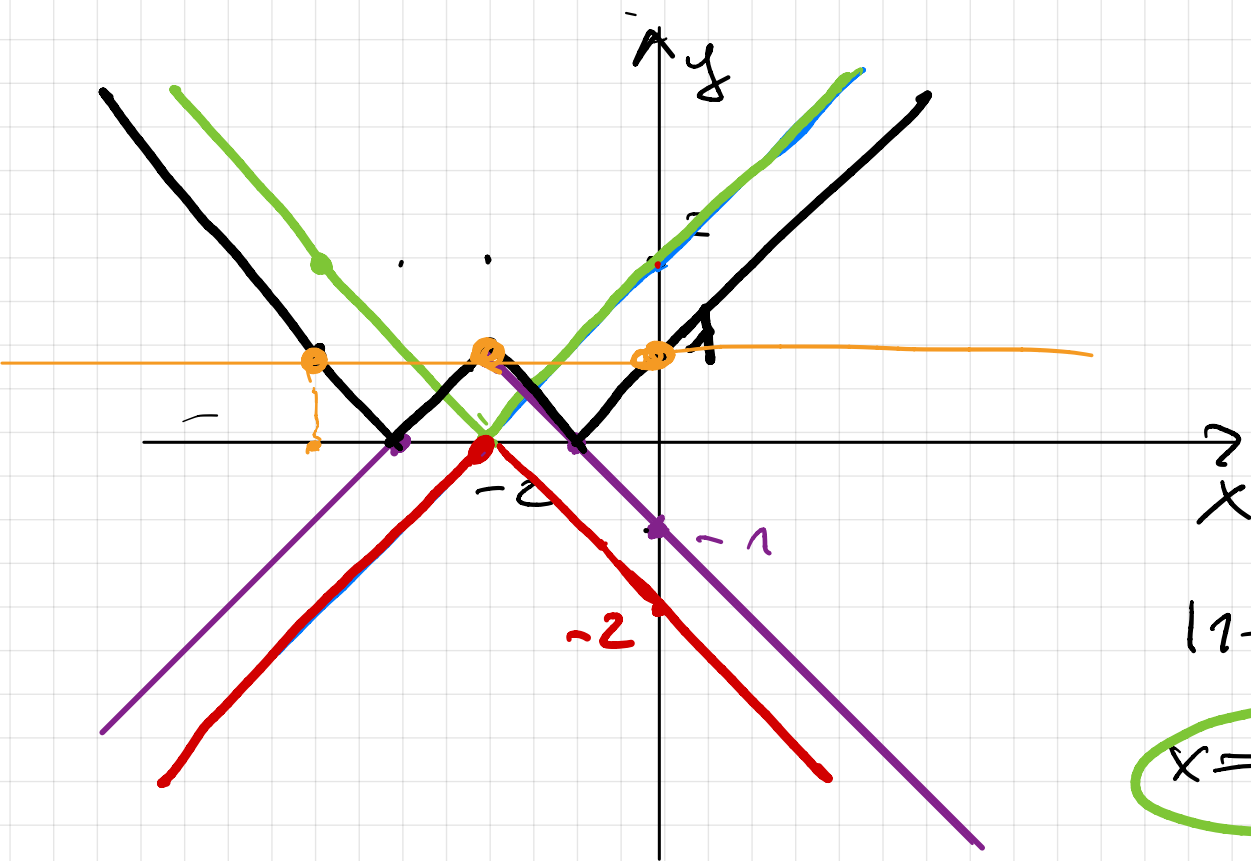
Absolutna vrednost $a \in \mathbb{R}$

$$d(a, 0) = |a|$$

$$|a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0 \end{cases}$$

(a) $|x + 1| = 3 \iff x + 1 = \pm 3 \iff x = -1 \pm 3$,
 $x_1 = -4, x_2 = 2$

(b) Grafico: Narišimo graf $y = |1 - |x + 2||$



$$y = x + 2$$

$$y = |x + 2|$$

$$y = -|x + 2|$$

$$y = 1 - |x + 2|$$

$$y = |1 - |x + 2||$$

$$|1 - |x + 2|| = 1$$

$$x = 0, -2, -4$$

Razmislo: $|1 - |x + 2|| = 1 \iff$

$$\iff 1 - |x + 2| = \pm 1 \iff -|x + 2| = -1 \pm 1 \iff$$

$$\iff |x + 2| = 1 \mp 1$$

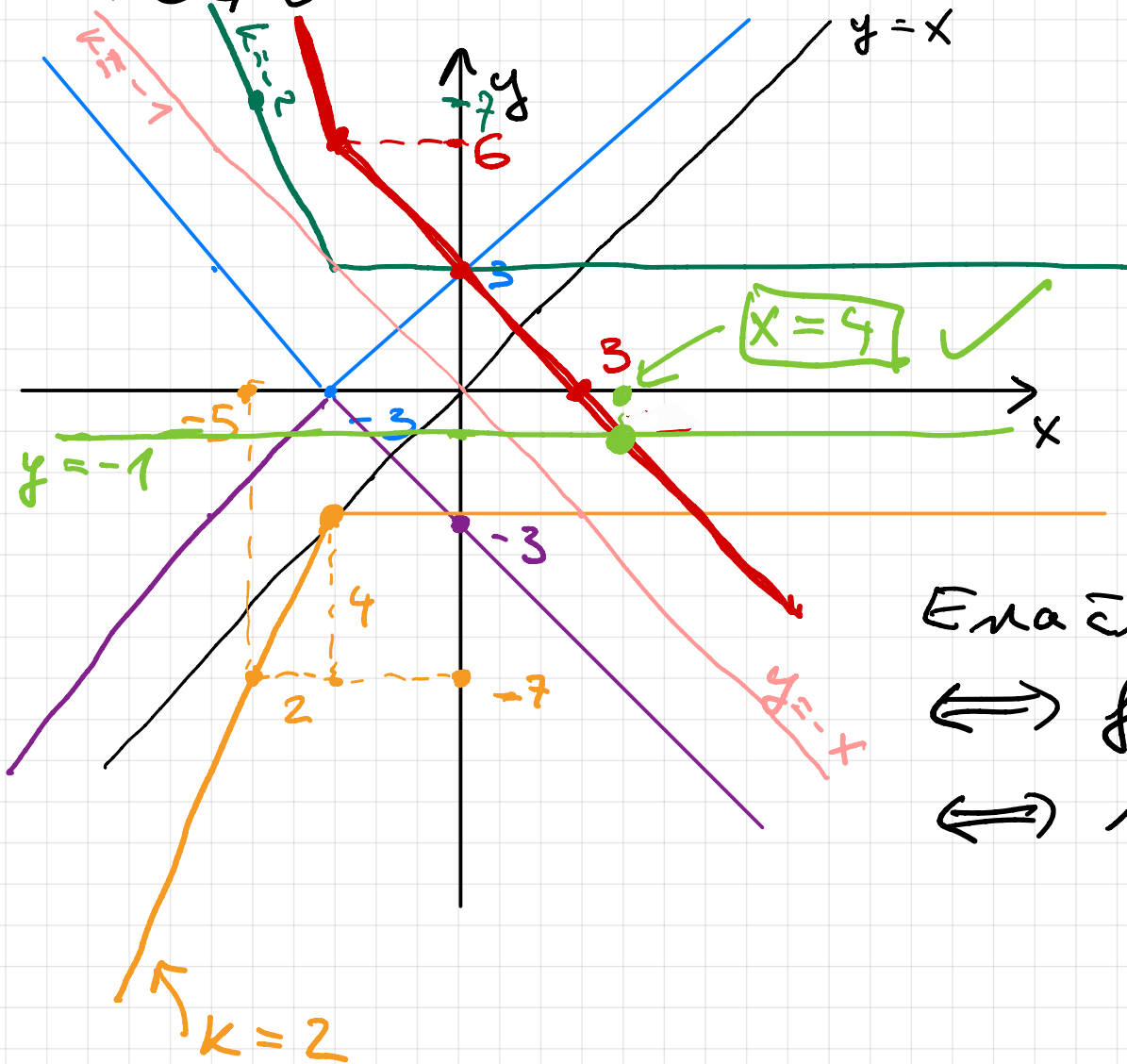
$$\underbrace{|x + 2| = 0}_{\text{ali}} \quad \text{ali} \quad \underbrace{|x + 2| = 2}$$

$$\Downarrow \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\Downarrow \quad x + 2 = \pm 2 \Rightarrow x = \underbrace{-2}_{0, -4} \pm 2$$

$$|1 - x + |x - |3 + x|| = 0$$

① Graphisch:



$$y = |x + 3|$$

✓

$$y = -|x + 3|$$

$$y = x - |x + 3|$$

✓

$$y = |x - |x + 3||$$

$$y = -x + |x - |x + 3||$$

$$\text{Es gilt } |f(x)| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - x + |x - |3 + x|| = 0$$

$$\underline{-x + |x - |3 + x|| = -1}$$

② Računsko: Preoblikujemo v

$$|x - \underline{3+x}| = x-1$$

$$1) \ 3+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$$

$$|x - \underline{3+x}| = x-1$$

$$|x - 3 - x| = x-1$$

$$3 = x-1 \Rightarrow x=4$$

(preverimo, če ustreza pogoju...) $4 \geq -3$ ✓

$$x=4$$

$$2) \ 3+x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$$

$$|x - \underline{-(3+x)}| = x-1$$

$$|x+3+x| = x-1$$

$$|2x+3| = x-1$$

$$x \leq -3 \Rightarrow 2x \leq -6 \Rightarrow 2x+3 \leq -3$$

$$\Rightarrow 2x+3 < 0 \Rightarrow |2x+3| = -(2x+3)$$

$$-2x-3 = x-1 \Rightarrow -2 = 3x \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \not\leq -3$$