Funkcije

1. Ali so funkcije $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{x}{x}$ in $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ enake?

Za funkcijo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ določeno z neko formulo lahko poiščemo definicijsko območje

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,;\, \text{dano formulo lahko izračunamo v } x\}.$$

Naš primer

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad D_h = \mathbb{R}$$

Funkciji f in g sta enaki, če $D_f = D_g$ in za $\forall x \in D_f = D_g$ velja $f(x) = g(x)$.

Naš primer Ali je $f = g$? Ne, ker $D_f \neq D_g$.

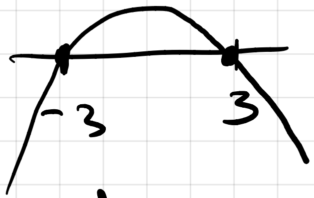
$$\underbrace{x \in D_g}_{x \neq 0} \subset D_f: \; g(x) = \cancel{\frac{x}{x}} = 1 = f(x) \implies f \text{ in } g$$

na D_g sovpadata, včasih rečemo, da je g zožitev za f, $g = f|_{D_g}$ ali f je razširitev za g.

- $f \overset{?}{=} h$: $D_f = D_h$ ✓ ampak $f(x) \neq h(x)$ za $\forall x$ (npr. $f(2) = 1$, $h(2) = \frac{1}{5}$) $\Longrightarrow$ $f \neq h$
- $g \overset{?}{=} h$: $D_g \neq D_h$ $\Longrightarrow$ $g \neq h$

2. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

D_f: $9 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 9 \iff x \in [-3, 3] = D_f$



$Z_f = \{f(x);\ x \in D_f\}$: $x \in [-3, 3] \Longrightarrow 9 - x^2 \in [\overset{x=\pm 3}{0}, \overset{x=0}{9}] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \sqrt{9 - x^2} \in [0, 3] = Z_f$

3. Ugotovi, ali so naslednje funkcije injektivne, surjektivne ali bijektivne.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,

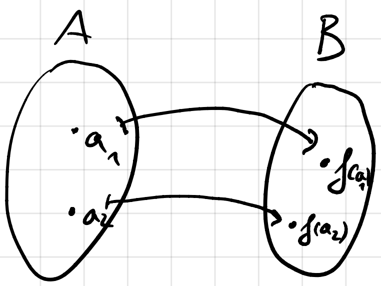
(b) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$,

(c) $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$.

INJ

• $f : A \to B$ je injektivna, če je $\boxed{a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)}$

(Lahko tudi: $\boxed{f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2}$)



SURJ

• $f : A \to B$ je surjektivna, če je $\boxed{Z_f = \{f(a) ; a \in A\} = B}$

$\boxed{\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b}$

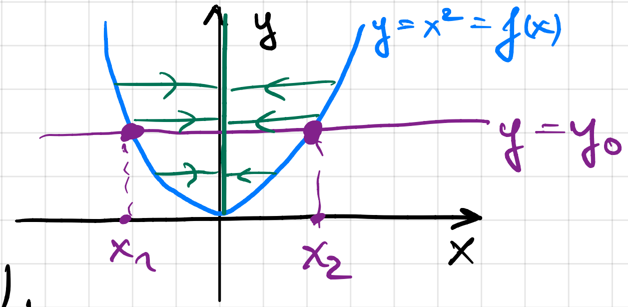
• $f : A \to B$ je bijektivna, če je injektivna in surjektivna.

a) $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

• f ni injektivna, ker $f(2) = f(-2) = 4$.

Najdemo $y = y_0$ (npr. 4), ki več kot enkrat seka graf.

↳ neinjektivnost



• $Z_f = [0, \infty)$ ... projekcija grafa na os y.

Ciljna množica (kodomena) $B = \mathbb{R}$

$Z_f \neq B \Rightarrow f$ ni surjektivna

• f ni bijektivna

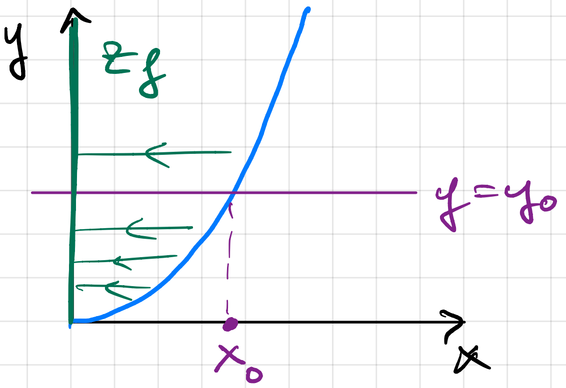
b) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

• f ni injektivna ($f(-2) = f(2)$)

- $Z_f = [0, \infty) = \boxed{B = [0,\infty)}$, torej f je surjektivna
- f ni bijektivna

c) $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$

$f(x) = x^2$



- f je injektivna:

$f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^2 = x_2^2 \Longrightarrow x_1 = \pm x_2 \xRightarrow[x_1, x_2 \geq 0]{} x_1 = x_2$ ✓

- $Z_f = [0,\infty) = B \ (= [0,\infty)) \Longrightarrow f$ je surjektivna
- f je bijektivna.

4. Podana je funkcija

$$f(x) = \frac{2 - e^x}{3 + 2e^x}.$$

Pokaži, da je f injektivna funkcija in poišči inverzno funkcijo f^{-1}. Kaj je definicijsko območje funkcije f^{-1}? Ali je f surjektivna funkcija?

Če jo gledamo kot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Injektivnost f: $\boxed{f(x_1) = f(x_2)} \Longrightarrow$

$$\frac{2 - e^{x_1}}{3 + 2e^{x_1}} = \frac{2 - e^{x_2}}{3 + 2e^{x_2}} \Longleftrightarrow (2 - e^{x_1})(3 + 2e^{x_2}) = (2 - e^{x_2})(3 + 2e^{x_1})$$

$(D_f = \mathbb{R}$, ker $3 + 2e^x > 0)$

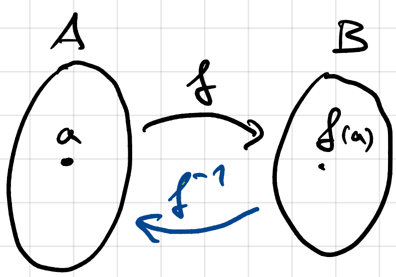
$$\cancel{6} + 4e^{x_2} - 3e^{x_1} - \cancel{2e^{x_1 + x_2}} = \cancel{6} + 4e^{x_1} - 3e^{x_2} - \cancel{2e^{x_1 + x_2}}$$

$$\cancel{7}e^{x_2} = \cancel{7}e^{x_1} \Longrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$ ✓

Inverzna funkcija:

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(f(a)) &= a \\ f(f^{-1}(b)) &= b \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underbrace{f : A \to B}_{\text{bijektivna}} \\ &\hookrightarrow \exists f^{-1} : B \to A \end{aligned}}$$



V primeru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $y = f(x) \xrightarrow[x \text{ in } y]{\text{zamenjamo}} x = f(y) \xrightarrow{\text{izrazimo}} y$

$$\boxed{y = f^{-1}(x)}$$

Naš primer $y = \frac{2-e^x}{3+2e^x} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \frac{2-e^y}{3+2e^y} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x(3+2e^y) = 2-e^y \Longrightarrow 3x + 2xe^y = 2 - e^y \Longrightarrow$

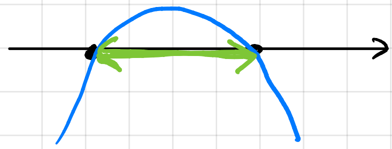
$\Longrightarrow 2xe^y + e^y = 2-3x \Longrightarrow e^y(2x+1) = 2-3x \Longrightarrow$

$\Longrightarrow e^y = \frac{2-3x}{2x+1} \; \{ \ln(\dots) \Longrightarrow y = \boxed{\ln \frac{2-3x}{2x+1} = f^{-1}(x)}$

$D_{f^{-1}}: \frac{2-3x}{2x+1} > 0 \; \{ \cdot \underbrace{(2x+1)^2}_{\substack{\vee \\ 0 \text{ za } x \neq -\frac{1}{2}}}$

$\overbrace{(2-3x)(2x+1)}^{-6x^2+\dots} > 0$

ničli: $x = \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$



Rešitev: $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) = D_{f^{-1}}$

Diskusija $f: D_f \xrightarrow{inj} \mathbb{R}$ (naš primer: $D_f = \mathbb{R}$)

$f: D_f \xrightarrow{inj} Z_f$ je še surjektivna, zato je bijektivna in ima inverzno funkcijo $f^{-1}: Z_f \longrightarrow D_f$

Sklepamo: $\boxed{D_{f^{-1}} = Z_f}$

V našem primeru $Z_f = D_{f^{-1}} = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ ✓

Recimo, da naš f gledamo kot $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ali je potem surjektivna? Ne, ker $Z_f \neq \mathbb{R}$.

6. Naj za funkcijo f velja $f(x-2)=(x+1)^3-(x-1)^2$. Izračunaj $f(3)$. Koliko je $f(f(3))$?

$x=5$

$$f(3) = f(5-2) = (5+1)^3-(5-1)^2 = 6^3-4^2 = 216-16 = 200$$

$x-2 \Rightarrow x=5$

$$\frac{36\cdot 6}{216}$$

$$f(f(3)) = f(200) = f(202-2) = 203^3-201^2 = \ldots \text{ D.N.}$$

$x=202$

✓

Dodatek Določi formulo za $f(x)$.

$$f(t-2) = (t+1)^3-(t-1)^2$$

$$f(x) = (x+3)^3-(x+1)^2 = x^3+9x^2+27x+27-x^2-2x-1$$

$x=t-2 \Rightarrow t=x+2$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$f(x) = x^3+8x^2+25x+26$$

7. Definirajmo funkcijo

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Pokaži, da je funkcija sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektivna in določi njeno inverzno funkcijo.

$f(x) = sh(x)$ sinus hiperbolicus

$D_f = \mathbb{R}$ ✓

- injektivnost: $sh(x_1) = sh(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$$\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} = \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \quad / \cdot 2$$

$$e^{x_1} - \underbrace{e^{-x_1}}_{=\frac{1}{e^{x_1}}} = e^{x_2} - \underbrace{e^{-x_2}}_{=\frac{1}{e^{x_2}}} \quad / \cdot e^{x_1} \cdot e^{x_2}$$

$$e^{2x_1+x_2} - e^{x_2} = e^{2x_2+x_1} - e^{x_1}$$

$$e^{2x_1+x_2} - e^{2x_2+x_1} = e^{x_2} - e^{x_1}$$

$$e^{x_1+x_2}(e^{x_1} - e^{x_2}) = e^{x_2} - e^{x_1} \Longleftrightarrow e^{x_1+x_2}(e^{x_1} - e^{x_2}) + e^{x_1} - e^{x_2} = 0$$

$$(e^{x_1} - e^{x_2})(\underbrace{e^{x_1+x_2} + 1}_{> 0}) = 0 \Longrightarrow e^{x_1} - e^{x_2} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$$ ✓

- surjektivnost: $Z_f = D_{f^{-1}}$ (če je f injektivna)

Račun za f^{-1}: $y = sh(x) \; (= f(x))$ $\xrightarrow{x \leftrightarrow y}$

$$\rightsquigarrow x = sh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Longrightarrow 2x = e^y - \underbrace{e^{-y}}_{=\frac{1}{e^y}} \quad / \cdot e^y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 1 \Longrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$$t = e^y; \quad t^2 - 2xt - 1 = 0 \longrightarrow t_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} =$$

$$= \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2+1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

1) $t = x + \sqrt{x^2+1} = e^y \Longrightarrow y = \ln(\underbrace{x + \sqrt{x^2+1}}_{> 0 \, ?})$ ✓

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{x^2+1} + x > |x| + x \geq 0 \Longrightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0$$

2) $t = x - \sqrt{x^2+1}$

$$\sqrt{x^2+1} > |x| \Rightarrow -\sqrt{x^2+1} < -|x| \Rightarrow x-\sqrt{x^2+1} < x-|x| \leq 0$$

$$\Rightarrow t = e^y = x - \sqrt{x^2+1} < 0 \ //$$

Dobimo: $\boxed{f^{-1}(x) = \ln(\underbrace{x+\sqrt{x^2+1}}_{>0})} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R} = Z_f$

sh: $\mathbb{R} \xrightarrow{inj} \mathbb{R}$, $Z_f = \mathbb{R}$ (surjektivna) $\Rightarrow$ bijekcija

8. Poišči bijekcije med naslednjimi množicami.

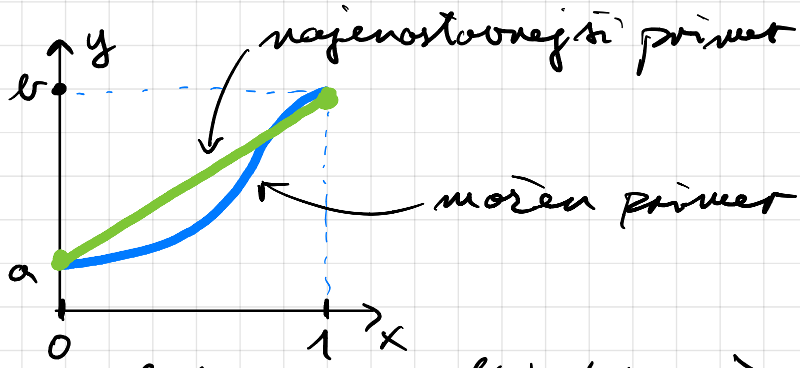
   (a) $[0,1]$ in $[a,b]$,

   (b) $(0,1)$ in $\mathbb{R}$,

✓

(a) $f: [0,1] \xrightarrow{bij} [a,b]$

$Z_f = [a,b]$ ($\Leftarrow$ surj.)



Poiščimo linearno funkcijo, $f(0)=a$ in $f(1)=b$: $f(x) = kx+n \Rightarrow f(0) = n = a$, $f(1) = k+n \Rightarrow$

$\Rightarrow b = k+a \Rightarrow k = b-a$

$$\boxed{f(x) = (b-a)x + a}$$

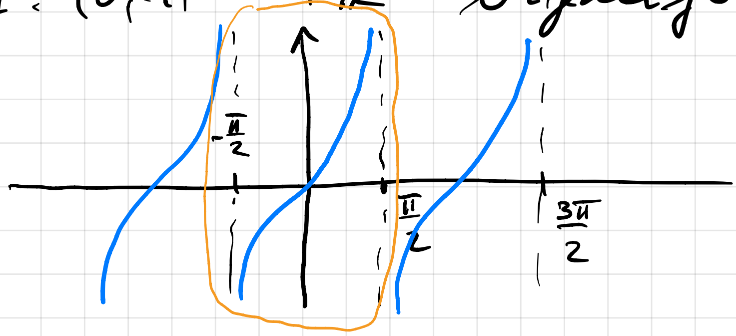
Ali imata $[0,1]$ in $[0,2]$ enako elementov?

DA, ker med njima najdemo bijektivno preslikavo:

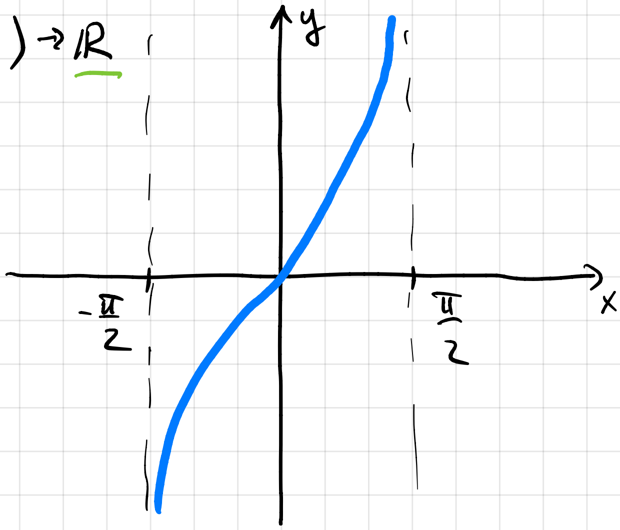
DEF. Množici A in B imata isto moč, če obstaja bijektivna preslikava $f: A \to B$

(b) Iščemo $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ bijekcijo.

$g(x) = \operatorname{tg} x$



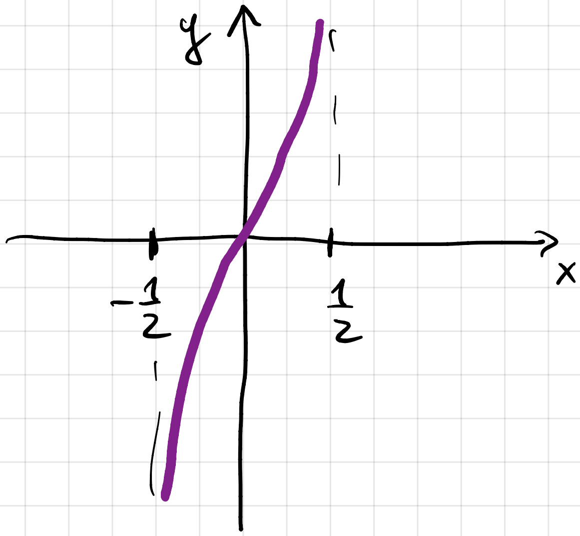
$g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$



- g je injektivna, ker strogo raste
- $Z_g = \mathbb{R} \Rightarrow$ g je surjektivna

↳ g je bijektivna

$h(x) = tg(\pi x) = tg\left(\frac{x}{\frac{1}{\pi}}\right)$ ... "raztег grafa" za faktor $\frac{1}{\pi}$ v smeri osi x



Želimo premik za $\frac{1}{2}$ v desno:

$f(x) = h\left(x - \frac{1}{2}\right) = tg\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = tg\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$