

Korenski kriterij $C_n = \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+\delta}{n+1}\right)^{n-1}$

$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+\delta}{n+1}\right)^{n-1 \rightarrow \infty}$

$\left(\frac{n+\delta}{n+1}\right)^{n-1} = \left(\frac{\overbrace{n+1-1+\delta}^{\text{vriremo } 1}}{n+1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{\delta-1}{n+1}\right)^{n-1}$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty (\text{ta } \delta \neq 1)} e$

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\delta-1)(n-1)}{n+1} = \delta-1$

Torej $C = e^{\delta-1}$

① $C < 1 \Leftrightarrow \delta-1 < 0 \Leftrightarrow \delta < 1$

Če je $\delta < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira.

② $C > 1 \Leftrightarrow \delta > 1$

Če je $\delta > 1 \Rightarrow$ vrsta divergira.

③ $\delta = 1: a_n = \left(\frac{n+1}{n+1}\right)^{n(n-1)} = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ vrsta divergira, ker $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

6. Dana je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Ali konvergira? Ali konvergira absolutno? Oцени napako, ki jo storiš, če za približek vsote cele vrste vzameš vsoto njenih prvih štirih členov.

$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n!}\right)}_0 \cdot \underbrace{(-1)^n}_{\text{OMEJENO}} = 0$

"0 · OMEJENO" = 0

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n! \cdot (-1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot (-1)^n} = \frac{-1}{n+1}$ $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{n! \cdot (n+1)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

POZOR: kriterija (kvocientni ali koreški) uporabimo le za vrste s nenegativnimi členi.

Absolutna konvergenca:

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergira, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

TRDITEV: Če vrsta absolutno konvergira, potem tudi konvergira.

Ta trditev nam omogoča uporabo kriterijev, ker ima $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ neneg. člene.

Naj primer

$$D_n = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0 < 1 \Rightarrow \text{Vrsta } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

konvergira $\Rightarrow$ Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konv.
TRDITEV $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Leibnizov kriterij: ^{LK}Opazujemo alternirajočo

$$\text{vrsta } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n = -c_1 + c_2 - c_3 + c_4 \mp \dots \quad c_n \geq 0, \quad c_n > c_{n+1}$$

Velja: Če je c_n padajoče zaporedje in je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \xrightarrow{\text{LK}} \text{Vrsta } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n \text{ konvergira.}$$

S tem kriterijem lahko direktno določimo konvergenco naše vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$:

$\epsilon_n = \frac{1}{n!}$ je padajoče, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$ (LK)
↑ vrste
Vrsta konvergirana.

Dodatek k (LK) (OCENA NAPAKE):

Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \epsilon_n$ konvergirata po LK, potem velja

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^n \epsilon_n \right| \leq \epsilon_{m+1}.$$

KOMENTAR: Celotna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \epsilon_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^n \epsilon_n}_{\substack{\text{ostanek, če} \\ \text{za } \delta \text{ vzamemo} \\ \text{približek } \delta_m}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \epsilon_n}_{\delta} - \underbrace{\sum_{n=1}^m (-1)^n \epsilon_n}_{\substack{\delta_m \\ \text{delna vsota}}}$$

Dodatek pravi, da je napaka približna δ_m manjša ali enaka ϵ_{m+1} :

$$|\delta - \delta_m| \leq \epsilon_{m+1}$$

↳ Napaka manjša od prvega izpuščenega člena (ϵ_{m+1}).

Naše vprašanje je napaka približna δ_4 : Prvi štirje členi

$$|\delta - \delta_4| \leq \epsilon_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

Napaka manjša od $\frac{1}{100}$ (dve decimalki).

7. Ugotovi konvergenco naslednjih vrst:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

a) Za $n \in \mathbb{N}$ $\ln n \geq 0 \Rightarrow$ alternirajoča vrsta

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$$

(Lk) Opomba: $a_1 = 0$ zato operiramo
 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \Rightarrow c_n = \frac{\ln n}{n}$ za $n \geq 2$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{n} = 0$

$$\frac{\ln n}{n} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \ln n = \ln(n^{\frac{1}{n}})$$

SPLOŠNEJE:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^x} = 0 \text{ za } x > 0$$

• Ali je c_n padajoča?

$$c_n = \ln n^{\frac{1}{n}} \stackrel{?}{\geq} \ln (n+1)^{\frac{1}{n+1}} = c_{n+1}$$

$$\Rightarrow n^{\frac{1}{n}} \geq (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)} \Leftrightarrow \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \leq 1 \quad ?$$

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} &= \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{n} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Torej za $n \geq n_0$ (dovolj velik) velja

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \leq 1, \text{ ker je } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = 0.$$

Slepamo, da c_n od neke dalje padajo

Uk Vrsta konvergira.

DODATEK: $(1 + \frac{1}{n})^n : 2, \underset{n=1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}, \dots$ je
monotono i ograničeno 2 i 3).

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n} \leq \frac{3}{n} \leq 1 \\ & \quad \quad \quad \uparrow \\ & \quad \quad \quad \text{za } n \geq 3 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \bullet \text{ Za } n=2: \frac{(\frac{3}{2})^2}{2} = \frac{9}{8} > 1 \\ & \quad \quad \quad \frac{\frac{2}{1}}{+} \frac{\frac{2}{2}}{2} \end{aligned} \right\} \underline{u_2 < u_3 > u_4 > u_5 \dots}$$

PRIMER: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$

$$\dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{n}+1 - \sqrt{n}-1}{n-1}}{\frac{2}{n-1}}$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

harmonična $\rightarrow \infty$

V tej vrsti je $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, alternativno
vrsta pa ne konvergira, zato je pogoj o
padanju u_n potreben.

Absolutna konvergenca?

Ali $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ absolutno konvergira?

Ali vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right) \leftarrow |a_n|$ konvergira?

$\frac{\ln n}{n} \geq 0$: kvocientni kriterij

$$D_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)} \cdot n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 1 \quad \text{☹️}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} : \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \ln n \geq \frac{1}{n} \quad \text{za } n \geq 3 \quad (\ln n \geq \ln 3 > 1)$$

$$\text{Za } n \geq 3: \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad \xrightarrow{\sum \frac{1}{n} \text{ DIV.}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \text{ DIV.}$$

$\Rightarrow$ Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ ne konv. absolutno.

Vrsta, ki konvergira, ne konvergira pa absolutno, je počasno konvergentna.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$.

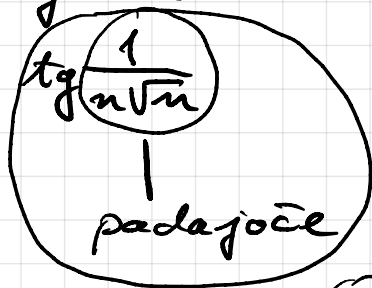
$$a_n = (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \in (0, 1] \subset (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}} > 0 \Rightarrow \text{dono}$$

vrsta je alternirajoča.

(LK) $\bullet \epsilon_n = |a_n| = \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$



— padajoče ✓

$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \operatorname{tg} 0 = 0$

$\downarrow n \rightarrow \infty$
0

Torej naša vrsta konvergira (po (LK)).

Ali vrsta konvergira absolutno?

$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}}_{\epsilon_n}$: Če je x blizu 0, se $\operatorname{tg} x$ obnaša kot x :

Za x blizu 0: $\operatorname{tg} x \approx x$

$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1$ (boste dokazali)

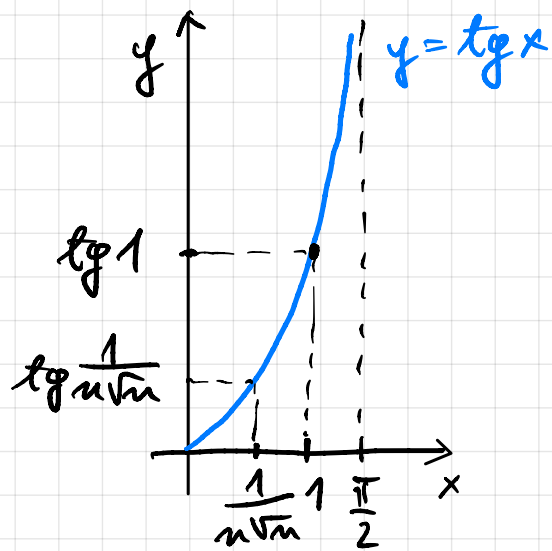
$\downarrow$
1

Za velike n je $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ blizu 0, zato

$\operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}} \approx \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergira.

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konv.} \Leftrightarrow s > 1 \right)$



Ker n členi naše vrste obnašajo kot členi konvergentne vrste, sklepamo, da tudi naša vrsta konvergira.

To utemeljimo z **izvoljenim prim. kriterijem (IPK)**:

$$c_n, b_n > 0$$

$$\text{Če je } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = L \in (0, \infty) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.}$$

Naš primer $c_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\text{IPK} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergira, saj } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konv.}$$

Torej: naša vrsta absolutno konvergira.

✓