

BAZE IN PREDBAZE

Za neko družino odprtih množic $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ rečemo, da je baza topologije $\mathcal{T}$, če lahko vsak element T dobimo kot unijo elementov B .

• kanonični primer: v metričnem prostoru lahko za bazo



topologije vzamemo odprte krogle

$\mathcal{B} = \{\text{družina vseh odprtih krogel}\}$

npr.

- lahko smo "varčni" in vzamemo le najhujše krogle, ali samo krogle z racionalnim polmerom, ali le krogle s polmerom $\frac{1}{n}$, $n=1,2,3,\dots$

Ali lahko v $\mathbb{R}^n$ vzamemo le

krogle s središčem v $\mathbb{Q}^n$?

druga možnost: $\{K(x, r) \mid r < 1\}$

$\{K(x, \frac{1}{n}) \mid n=1,2,\dots\}$



$x \notin \mathbb{Q}^n$

- zapis elementov $\mathcal{T}$ kot unije elementov $\mathcal{B}$ ni enoličen, zato je baza topologije analogna ogradju vektorskega prostora

Trditvi $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{B}$ baza $\mathcal{T}$

(1) $A \subseteq X$ je odprta $\Leftrightarrow$ za vsak $x \in A$ obstaja $B \in \mathcal{B}$: $x \in B \subseteq A$

(2) $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X', \mathcal{T}')$, $\mathcal{B}$ baza $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}'$ baza $\mathcal{T}'$

- f je zvezna $\Leftrightarrow f^{-1}(B') \subseteq \mathcal{T}$
- f je odprta $\Leftrightarrow f(B) \subseteq \mathcal{T}'$

Dokaz (1)



(2) $\Rightarrow \checkmark$

$U^{\text{odp}} \subseteq X'$

U = unija bazisnih

$f^{-1}U = f^{-1}(\text{unija bazisnih})$

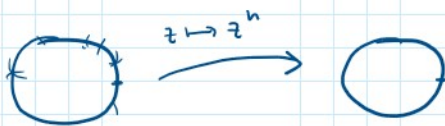
= unija $\{f^{-1}(\text{bazisne})\}$, torej je

$= \bigcup \{f^{-1}(\text{bazone})\}$, torej je odprta

za odprtost preslikave
 $\Rightarrow \checkmark \quad U^{\text{odp}} \in X, \quad f \text{ ohranja unije} \dots$

□

Primer: $f: S^1 \rightarrow S^1, f(z) = z^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ je odprta



za bazo topologije vzamemo odprte loka, ki so krajši od $\frac{2\pi}{n}$
 f od takega loka je odprta lok
 potochi (2) je f odprta preslikava

Lokalna baza okolice pri $x \in X$: $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ so odprte okolice x in velja, da za vsak $U \in \mathcal{T}$, ki vsebuje x obstaja $B \in \mathcal{B}_x, B \subseteq U$

- krogle s središčem v x so lokalna baza za x v metrichi topologiji (lahko vzamemo tudi samo majhne krogle ali samo krogle z rac. polmerom)



- unija lokalnih baz za vse $x \in X$ je baza celotne topologije

Ali moramo vseh lokalne baze za vse $x \in X$?

dratko: če je $\mathcal{B}$ baza $\mathcal{T}$, potem je $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$
 lokalna baza okoli x

Naj bo $\mathcal{B}$ podjebna družina podmnožic X in $\mathcal{T} = \{\text{vse možne unije elementov } \mathcal{B}\}$

Je $\mathcal{T}$ topologija na X ? (1) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$, oz. je $\mathcal{B}$ pokriva X

(2) jasno (unija unij je unija)

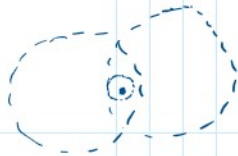
(3) $U, V \in \mathcal{T} \quad U = \bigcup_{\lambda} B_{\lambda}, B_{\lambda} \in \mathcal{B} \quad V = \bigcup_{\mu} B_{\mu}, B_{\mu} \in \mathcal{B}$
 $U \cap V = \left(\bigcup_{\lambda} B_{\lambda} \right) \cap \left(\bigcup_{\mu} B_{\mu} \right) = \bigcup_{\lambda, \mu} (B_{\lambda} \cap B_{\mu})$

če je $\mathcal{B}$ zanka za končne preseke, potem je $\mathcal{T}$ topologija

če je $\mathcal{B}$ zaprta za končne preseke, potem je $\mathcal{T}$ topologija

Ta pogoj ni izpolnjen pri metričnih toploglah.

Pogoj o končnih presekih je nepotrebno oster, dovolj je, če je vsak $B_1 \cap B_2$ unija elementov $\mathcal{B}$



Teorema

Naj bo $\mathcal{B}$ družina podmnožic X in $\mathcal{T} = \{\text{unije elementov } \mathcal{B}\}$

$\mathcal{T}$ je topologija $\Leftrightarrow$ (1) $\mathcal{B}$ je pokritje X
(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 \cap B_2 \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$

□

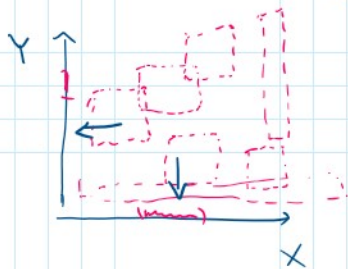
Produktna topologija

$(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}')$

$\{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{T}'\}$ ni topologija na $X \times Y, \dots$

"škatlaste množice", nima ni unije škatlasti

Škatlaste množice niso topologija, vendar so zaprte za končne preseke in zato tvorijo bazo neke topologije. To je **produktna topologija**



projekcije so zvezne in odprte

$(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{T}'), (X \times Y, \text{produktna top})$

$X \xleftarrow{\text{pr}_x} X \times Y \xrightarrow{\text{pr}_y} Y \quad U \in \mathcal{T} \quad \text{pr}_x^{-1}(U) = U \times Y$ škatlasta, torej odprta

škatla $U \times V \quad \text{pr}_x(U \times V) = U, \text{pr}_y(U \times V) = V$

projekcije v splošnem niso zaprte



... ..

$(\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^n)$



Γ je zapiš v produktu
 $\text{pr}_1(\Gamma) = (0, +\infty)$ ni zapiš v $\sum 0, +\infty)$

Naj bo $\mathcal{P}$ neka določena podmnožica X

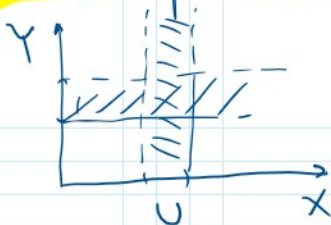
Kaj je minimalna topologija na X
 v kateri so množice iz $\mathcal{P}$ odprte?

Prejšnji prenoslek pokaže, da
 je dovolj, če vstanemo
 poljubne unije končnih presekov
 elementov $\mathcal{P}$.

Predbaza (podbaza, sub-basis)

$\mathcal{P}$ poljuben $\leadsto \mathcal{T} = \{ \text{polj. unije končnih presekov eltor } \mathcal{P} \}$

"Pasovi" so predbaza produktne topologije



$$\begin{aligned} U^{\text{odp}} \subseteq X & \quad \text{pr}_X^{-1}(U) \\ V^{\text{odp}} \subseteq Y & \quad \text{pr}_Y^{-1}(V) \end{aligned}$$

Produktna topologija je najmanjša topologija na produktu,
 za katero so projekcije zvezne.

Teorema

$f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$, $\mathcal{P}'$ predbaza za $\mathcal{T}'$
 f je zvezna $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{P}') \subseteq \mathcal{T}$

(zato ker f^{-1} ohranja
 unije in preseke)

Pozor: podoben test za odprtost f ne deluje

(ker v splošnem $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$)

Trditev

$f: Z \rightarrow X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ je zvezna $\Leftrightarrow$ vse komponente f so zvezne.

Dokaz $(\Rightarrow)$ $Z \xrightarrow{f} X \times Y$ $f = (f_x, f_y)$ $f_x = \text{pr}_x \circ f$ $f_y = \text{pr}_y \circ f$
 $\Rightarrow f_x, f_y$ so

$(\Leftarrow)$ $U \subseteq X \times Y$ $f^{-1}(U)$ $f^{-1}(V \times Y) =$ odprta, enako za $V \subseteq X$ "vodoravne" pasove.

$$z \in f^{-1}(V \times Y) \quad f_x(z) \in V = f_x^{-1}(V)$$

~~$f_y(z) \in Y$~~



Kardinalnost baze je mera velikosti topologije.

• $\mathcal{T}$ ima končno bazo $\leadsto \mathcal{T}$ je končna

• $\mathcal{T}$ ima števno bazo:

$(X, \mathcal{T})$ ustreza 1-aksiomu števnosti (je '1-števen'), če za vsake $x \in X$ obstaja števna lokalna baza okoli x

• Vse metrični prostor je 1-števen

ker lahko za lokalno bazo vzamemo krogle z racionalnim radijem.

Trditev X 1-števen

(1) za vsake $A \subseteq X$ je $\bar{A} = L(A) := \{x \mid x \text{ je limita zaporedja točk v } A\}$

(2) $f: X \rightarrow Y$ je zvezna $\Leftrightarrow$ za vsake $A \subseteq X$ velja $f(L(A)) \subseteq L(f(A))$

Dokaz

(1) jasno $A \subseteq L(A) \subseteq \bar{A}$

$\bar{A} \subseteq L(A)$ za $x \in \bar{A}$ obstaja lokalna baza okoli $U_1, U_2, \dots$
za vsake i izberemo $a_i \in A \cap U_i$ (zakaj je neprazna?)
 $\{a_i\}$

Vsaka okolica U za x vsebuje neko bazično okolico U_i
 $\leadsto U$ vsebuje $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots \leadsto x$ je limita zaporedja $\{a_i\}$

(2) D.N.



$(X, \mathcal{T})$ imata 2. aksiomu števosti (je '2-števen'), če obstaja neka števna baza topologije $\mathcal{T}$

Sveda: 2-števnost implicira 1-števnost

diskreten prostor z neskončno mnogo točkami je 1-števen, vendar ni 2-števen

Ali je $\mathbb{R}^n$ 2-števen?



$A \subseteq X$ je gosta (glede na topologijo $\mathcal{T}$), če je $\bar{A} = X$

$(X, \mathcal{T})$ je separabilen, če v njem obstaja kakšna števna gosta množica

- $\mathbb{R}^n$ je separabilen ($\mathbb{Q}^n$ je gosta v $\mathbb{R}^n$)

- $C([0,1])$ je separabilen

↳ vzame realne funkcije na $[0,1]$

Weierstrassov izrek: vsako nemo funkcijo na $[a,b]$ lahko enakomerno aproksimiramo s polinomi (torej, polinomi so gosti v $C([0,1])$ z običajno metriko) in polinomi z racionalnimi koeficienti so gosti v $C([0,1])$

- 2-števnost $\Rightarrow$ separabilnost

Če v vsaki bazični okolici izberemo po eno točko dobimo števno gosto množico

kaj pa obratno?

Podaja domneva: ali velja

separabilnost + 1-števnost $\Rightarrow$ 2-števnost? NE.

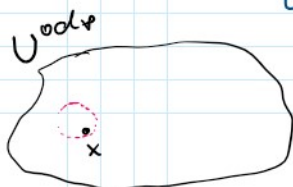
IZREK

Metrični prostor je 2-števen natanko takrat, ko je separabilen.

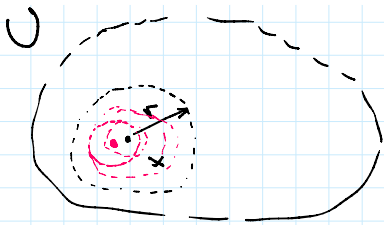
Dokaz ($\Rightarrow$) jasno (v poljubnih prostorih)

($\Leftarrow$) $\mathbb{Q}$ števna gosta $B := \{K(q,r) \mid q \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{Q}\}$

B je baza



$\exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U$



$$\exists z \in Q : d(x, z) < \frac{r}{3}$$

$$\exists s \in \mathbb{Q} : \frac{r}{3} < s < \frac{2r}{3}$$

$$x \in K(z, s) \subseteq K(x, r) \subseteq U$$