

TGP, 2021/22  
4. VAJE : 27.10.2021

1. Naj bo

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potem je  $F = \langle a, b \rangle \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  prosta podgrupa končnega indeksa. Pokaži, da je

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), F] = 12.$$

• Pokaži, da je

$$F = \left\{ A = \begin{bmatrix} 4m+1 & 2r \\ 2s & 4n+1 \end{bmatrix} \mid m, n, r, s \in \mathbb{Z}, \det(A) = 1 \right\}$$

• Naj bo

$$G = \left\{ B = \begin{bmatrix} 2m+1 & 2r \\ 2s & 2n+1 \end{bmatrix} \mid m, n, r, s \in \mathbb{Z}, \det(B) = 1 \right\}$$

•  $[G, F] = 2$ ,  $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), G] = 6$  ( $G$  je jedro  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_2)$ ).

2. Naj bo  $G$  končna netrivialna grupa. Pokaži: Če je  $G$  rešljiva, potem vsebuje netrivialno abelovo edinko. Če  $G$  ni rešljiva, potem vsebuje netrivialno edinko  $N$  z lastnostjo  $N = N'$ .

3. Pokaži, da je razred noetherskih grup zaprt za podgrupe, kvociente in razširitve.