

II. KONVERGENCA V PROSTORIH HOLOMORFNIH FUNKCIJ

1. Banachovi algebri $\mathcal{C}(K)$ in $A(K)$.
- 2° Topologija enakomerne konvergence na kompaktnih.
Fréchetovi algebri $\mathcal{C}(\Omega)$ in $\mathcal{H}(\Omega)$.
- 3° Izrek Arzela - Ascoli.
- 4° Normalne družine in Montelov izrek.
- 5° Riemannov upodobljenosti izrek.



-2.1-

II.1. Banachovi algebr: $C(K)$, $A(K)$.
~~Banachov prostor $C(K)$ ($H(K)$).~~

Naj bo $K \subset \mathbb{C}$ kompaktna množica.

Def. $C(K) = \{ f: K \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ zvezna} \}$

$$A(K) = \{ f \in C(K) \mid f \in \mathcal{H}(K) \} \subset C(K)$$

↑
holomorfna
notranjosti K .

$C(K)$ in $A(K)$ sta $(\infty\text{-dim})$ $\mathbb{C}$ -vektorska prostora
 (vsota funkcij, produkt s skalarom).

Sta tudi algebr (produkt funkcij).

Norma: $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in K} |f(z)|$

$$\begin{cases} \|f+g\|_K \leq \|f\|_K + \|g\|_K \\ \|cf\|_K = |c| \cdot \|f\|_K \end{cases}$$

Tako dobimo normirana ~~vektorska~~ vektorska prostora $C(K), A(K)$.

Kaj ji konvergenca v normi $\|\cdot\|_K$?

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \iff \|f_n - f\|_K \rightarrow 0$$

$$\iff \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$$

$$\iff f_n \rightarrow f \text{ enakomerno na } K.$$

Metrika na $C(K)$:

$$d_K(f, g) = \|f - g\|_K = \sup_{z \in K} |f(z) - g(z)|.$$

IZREK.

(i) Prostor $C(K)$, opremljen z normo $\|\cdot\|_K$ (in prirejeni metriko d_K) je poln (vsako Cauchyovo zaporedje je konvergentno).

(ii) ~~Prostor~~ $A(K)$ je zaprt ^{vektorski} podprostor prostora $C(K)$,
torej je tudi poln (Banachov).

Opomba: Normiran vektorski prostor, ki je poln v prirejeni metriki, se imenuje Banachov prostor.
Torej sta $C(K)$, $A(K)$ Banachove prostore.

Dokaz:

(i) Naj bo $f_n \in C(K)$ ($n \in \mathbb{N}$) Cauchyovo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \ni \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_K < \varepsilon.$$

Fiksiramo $z \in K$;

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \|f_n - f_m\|$$

$\Rightarrow$ zaporedje $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyovo
 $\Rightarrow$ konvergentno.

Naj bo

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z), \quad z \in K.$$

za fiksen $\varepsilon > 0$ izberemo $n_0 \in \mathbb{N}$ kot v def.

Cauchyjevo zaporedje:

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f_m(z)| \leq \|f_n - f_m\|_K < \varepsilon.$$

$m \rightarrow \infty$ (n fiksen):

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

To velja $\forall z \in K$, torej

$$\|f_n - f\|_K \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

To pomeni, da $f_n \rightarrow f$ enotomerno na K .

Sledi, da je f zvezna na K , $f \in C(K)$.

(Dokaz: $z_0 \in K$, $\varepsilon > 0$. Izberemo n dovolj velik, da je $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall z \in K$. Fiksiramo n .

Izberemo $\delta > 0$, da velja:

$$z \in K, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Sedaj: } |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| \\ &\quad + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

S tem je dokazana trditev (i).

Trditev (ii): Naj bo $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ v $\mathcal{L}(K)$,

pri čemer $f_n \in A(K)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Izberemo ^{kompaktn} pravokotnik $R \Subset K$.

$$\oint_{\partial R} f(z) dz = \oint_{\partial R} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\partial R} f_n(z) dz = 0.$$

Opomba: limito in $\oint_{\partial R}$ smemo zamenjati,
ker je konvergenca $f_n \rightarrow f$ enakomerna na ∂R .

Zadnji integral = 0 po Cauchyevem izr.

Prek Morera pa, da je f holomorfa na K .

Torej $f \in A(K)$.

Drug argument: $z_0 \in K$, $r > 0$ majhen,

$$\overline{D}(z_0, r) \subset K.$$

Torej $f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
po Cauchyju f .

$$n \rightarrow \infty: f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi; \Rightarrow f \in \mathcal{H}(K)$$

Opomba: Norma $\|\cdot\|_K$ na $\mathcal{C}(K) \supset A(K)$ zadetca
Andi naslednji lastnosti za produkt:

$$\begin{cases} \|fg\|_K \leq \|f\|_K \cdot \|g\|_K \\ \|\mathbb{1}\|_K = 1 \quad (\mathbb{1}(z) = 1, \forall z \in K). \end{cases}$$

Zato sta $A(K) \subset \mathcal{C}(K)$ Banachovi algebr z enoto $\mathbb{1}$.

II.2. Topologija enakomerne konvergence na kompaktil

Naj bo Ω odprta neprazna množica v $\mathbb{C}$.

Algebra $\mathcal{C}(\Omega)$ želimo opremiti s topologijo,
v kateri velja naslednje:

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \iff f_n|_K \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f|_K \text{ enakomerno} \\ \text{za } \forall K \text{ kompakt} \subset \Omega.$$

Lema: Obstaja zaporedje vložnih kompaktov
 $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$

Jako da je $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

Dokaz: $K_n = \{z \in \Omega \mid |z| \leq n \text{ in} \\ |z - w| \geq \frac{1}{n}, \forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega\}.$

Preveri zgornje lastnosti.

$$(K_n = \mathbb{D}(0, n) \cap \{z \in \Omega \mid \text{dist}(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\}).$$

~~Primer~~ Opomba. Vsako tako zaporedje kompaktno se imenuje normalno razširjenje $\mathcal{N}$.

Velja: $\forall K$ kompaktno $\exists n \ni: K \subset K_n$.

Dokaz: $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_n = \mathcal{N}$.

Torej je $\{\overset{\circ}{K}_n\}$ odprto pokritje kompaktna K ,
zato $K \subset \overset{\circ}{K}_n$ za nek n .

Seminarna $P_m: \mathcal{C}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$P_m(f) \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{K_m} = \sup_{z \in K_m} |f(z)|.$$

$f_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$. Vse množice oblike

$$\{f \in \mathcal{C}(\mathcal{N}) : P_m(f - f_0) \leq \varepsilon\}$$

za $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, tvorimo za bazo
odprtih okoliš točke $f_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$.

To definira topologijo na $\mathcal{C}(\mathcal{N})$.

Preveri aksiome!

Kaj pomeni konvergenca v tej topologiji?

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_0$$

$\Leftrightarrow \forall$ okolice f_0 obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$,
tako da za $\forall n \geq n_0$, $f_n \in U$.

Za U si vemo vati različne okolice, definirane zgoraj.

Definicija: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_0\|_{K_n} < \varepsilon.$$

Ker je vsak kompaktni $K \subset \mathcal{N}$ vsebovan v
nekem K_n in ker velja $\|\cdot\|_K \leq \|\cdot\|_{K_n}$,
sleda

$\forall K \subset \mathcal{N}$ kompaktni, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_0\|_K < \varepsilon$$

Torej $f_n \rightarrow f_0$ enotomerno na vsakem
kompaktnem $K \subset \mathcal{N}$.

Velja tudi obratno: enotomerna konvergenca
na kompaktnih $\Rightarrow$ konvergenca na
kompaktnih $K_1, K_2, \dots$

Trditev

(i) ~~Prostor~~ Vektorski prostor $\mathcal{C}(N)$,
opremljen s topologijo enakomere konvergence
na kompaktnih (TEKK), je poln
v naslednjem smislu:

Če je zaporedje $f_n \in \mathcal{C}(N)$ Cauchyovo
na vsakem kompaktnem $K \subset N$, potem je
konvergentno v $\mathcal{C}(N)$.

(ii) $A(N) = \{f \in \mathcal{C}(N) \mid f \text{ holomorfn}$
je zaprt vektorski podprostor v $\mathcal{C}(N)$.

Dokaz (i) Če je $f_n|_K$ Cauchyovo, to pomeni;
da je enakomerno Cauchyovo na K ,
zato je enakomerno konvergentno:

$$\exists f \in \mathcal{C}(K), \|f - f_n\|_K \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Limitna fn. f je ena sama. Če upoštevamo
ta argument na vsakem kompaktnem v
zaporedju $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = N$,
dobimo $f \in \mathcal{C}(N)$.

(iv) To sledi neposredno iz prejšnjega rezultata,
da je enakomerna limita hol. fn. spet hol.

Sedaj bomo prostor $\mathcal{C}(K)$ metrizirali.

Najprej dokažemo

Trditev. Naj bo K kompaktna množica v $\mathbb{C}$.

Funkcija

$$\rho_K(f) = \frac{\|f\|_K}{1 + \|f\|_K}, \quad f \in \mathcal{C}(K)$$

je norma na $\mathcal{C}(K)$.

(Pri tem je $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$.)

Dokaz. ~~Bo~~ Oglejmo si funkcijo $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$h(t) = \frac{t}{1+t}.$$

Očitno je $h(0) = 0$, $h(t) > 0$ za $t > 0$,

$h(t) < 1$ za $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 1$.

Funkcija h je strogo monotono naraščajoča:

$$h'(t) = \frac{t(1+t) - t(1+t)}{(1+t)^2} = \frac{1+t - t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} > 0. \quad \square$$

$$\rho_K(f) = h(\|f\|_K) \quad \swarrow \text{ker je } h \uparrow$$

$$\rho_K(f+g) = h(\|f+g\|_K) \leq h(\|f\|_K + \|g\|_K)$$

$$= \frac{\|f\|_K + \|g\|_K}{1 + \|f\|_K + \|g\|_K} = \frac{\|f\|_K}{1 + \|f\|_K + \|g\|_K} + \frac{\|g\|_K}{1 + \|f\|_K + \|g\|_K}$$

$$\leq \frac{\|f\|_K}{1 + \|f\|_K} + \frac{\|g\|_K}{1 + \|g\|_K} = \rho_K(f) + \rho_K(g). \quad \blacksquare$$

Posledica: funkcija

$$\tilde{\rho}_K(f, g) = \rho_K(f - g) = \frac{\|f - g\|_K}{1 + \|f - g\|_K}$$

je metrika na $\mathcal{C}(K)$.

Naloga: Pokaži, da metrika $\tilde{\rho}_K$ inducira na $\mathcal{C}(K)$ isto topologijo kot metrika $d_K(f, g) = \|f - g\|_K$.

V obeh metrikah je zaporedje f_n konvergentno k limiti $f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_K(f_n, f) = 0$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_K(f_n, f) = 0.$$

Izberemo normalno razčrpanje

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \mathcal{N}$$

in def.

$$\rho(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \cdot \frac{\|f - g\|_{K_m}}{1 + \|f - g\|_{K_m}}$$

Zaporedje konvergira in vsota je < 1 ,
ker so členi $< 2^{-m}$; $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1$.

- Trditev (a) ρ je metrika na $\mathcal{C}(U)$.
- (b) Prirejena (inducirana) topologija je ravno topologija enakomerne konvergence na kompaktnih:
- $$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ enakomerno na kompaktnih}$$
- $$\Leftrightarrow \rho(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$
- (c) Prostor $\mathcal{C}(U)$ z metriko ρ je poln (vsako ρ -Cauchyovo zaporedje v $\mathcal{C}(U)$ konvergira k neki $f \in \mathcal{C}(U)$).
- (d) $\mathcal{H}(U)$ je zaprt ~~pa~~ metrični podprostor v $\mathcal{C}(U)$.

Opomba: metrika ρ je definirana s pomočjo sternovih družine seminorm

$$\rho_m(f) = \frac{\|f\|_{K_m}}{1 + \|f\|_{K_m}} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Tak ~~met~~ vektorski prostor, ki je poleg tega poln, se imenuje Fréchetov prostor.

Torej sta $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{C}(U)$ Fréchetova pr.

Dokaz (a) Ker je funkcija

$$\rho_K(f) = \frac{\|f\|_K}{1 + \|f\|_K}, \quad f \in \mathcal{C}(K)$$

norma na $\mathcal{C}(K)$ (glej stran 2.9), je

za vsak kompaktni K_j funkcija

$$(f, g) \rightarrow \frac{\|f - g\|_{K_j}}{1 + \|f - g\|_{K_j}}$$

~~se~~ pseudometrika na $\mathcal{C}(S)$ (velja simetričnost in trikotniška neenakost; razdalja med različnimi elementoma je lahko enaka 0).

Torej je ista $\rho(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|f - g\|_{K_j}}{1 + \|f - g\|_{K_j}}$

pseudometrika (vrsta konvergira in ista je < 1).

Očitno $\rho(f, g) = 0 \Rightarrow f = g$; torej je ρ metrika.

(b) Dokažimo sedaj, da se prirejena metrična topologija na $\mathcal{C}(S)$ ujema s topologijo enakomerne konvergence na kompaktnih.

Dokazati je potrebno naslednji dve trditvi za poljubno $f \in \mathcal{C}(S)$:

(i) Za vsak kompaktni $K \subset \Omega$ in $\forall \varepsilon > 0$
 obstaja tak $\delta > 0$, da velja:

$$\{g \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \rho(g, f) < \delta\} \subset \{g \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \|g - f\|_K < \varepsilon\}$$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$ in $\exists$ kompaktni $K \subset \Omega$, da
 velja

$$\{g \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \|g - f\|_K < \eta\} \subset \{g \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \rho(g, f) < \varepsilon\}$$

Dokaz (i): Izberemo $j \in \mathbb{N}$, da velja $K \subset K_j$.

Bez izgube splošnosti vzamemo $0 < \varepsilon < 1$.

Naj bo $\delta = 2^{-(j+1)} \varepsilon$. Tedaj

$$\rho(g, f) < \delta \Rightarrow \frac{2^{-j} \|f - g\|_{K_j}}{1 + \|f - g\|_{K_j}} < 2^{-j} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\|f - g\|_{K_j}}{1 + \|f - g\|_{K_j}} < \varepsilon/2 < 1/2.$$

Ker je funkcija $h(t) = \frac{t}{1+t}$ naraščajoča za $t > 0$
 in $h(1) = 1/2$, sledi $\|f - g\|_{K_j} < 1$.

Zato

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{K_j} &= \frac{\|f - g\|_{K_j}}{1 + \|f - g\|_{K_j}} \cdot (1 + \|f - g\|_{K_j}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

$$K \subset K_j \Rightarrow \|f - g\|_K < \varepsilon.$$

-2.14 -

Dokaz (ii); Izberemo $\varepsilon > 0$. Izberemo $n \in \mathbb{N}$,
da je $\sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-n} < \varepsilon/2$.

Naj bo $K = K_n$ in $\eta = \varepsilon/2$. Tedy:

$$\|g - f\|_K < \eta = \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\rho(g, f) = \sum_{j=1}^n 2^{-j} \frac{\|g - f\|_{K_j}}{1 + \|g - f\|_{K_j}} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \dots$$

$$< \sum_{j=1}^n 2^{-j} \cdot \|g - f\|_{K_n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) Vsako p -Cauchyovo zaporedje v $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ je
enezائمno Cauchyovo na vseh kompaktnih
 $K \subset \mathcal{U}$, torej je enozائمno konvergentno
na K in limitna funkcija je spet zvezna.

(d) Enozائمne limite holomorfnih funkcij je
spet holomorfa. (Uporabimo izrek Morera
ali pa Cauchyovo integralno reprezentacijo.)

11.3. NOR MALNE DRUŽINE, ^{-2.15-} IZREK ARZELA-ASCOLI, IZREK (Arzela - Ascoli).

Naj bo K kompakten ^{metrični} ~~topološki~~ prostor
in $\mathcal{F}$ neka družina zveznih funkcij na K ,
ki je

- enako omejena : $\exists M \in (0, \infty) :$
 $|f(z)| \leq M, \forall z \in K, \forall f \in \mathcal{F};$

- enako zvezna : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$z_1, z_2 \in K, d(z_1, z_2) < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon,$$

$$\forall f \in \mathcal{F}.$$

Tedy

Vsake zaporedje $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ vsebuje neko
podzaporedje $\{f_{n_k}\}$, ki konvergira enako omejeno
na K k neki zvezni funkciji na K .

Dokaz. Vzemimo $K \subset \mathbb{C}$.
Izberemo skleno pored gosto množico
 $z_1, z_2, \dots$ v K . ~~(skleno pored)~~

Ker je zaporedje $\{f_n(z_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ omejeno, obstaja
konvergentno podzaporedje:

~~$$f_{n_1}, f_{n_2}, \dots$$~~

$$f_{n_k}(z_1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f_1(z_1).$$

Dobljeno zaporedje $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots$ preimenujemo v
 $f_{1,1} \quad f_{1,2} \quad f_{1,3} \quad f_{1,4}, \dots$ (1. generacija)

Sedaj si ogledamo zaporedje vrednosti v z_2 :

$$f_{1,1}(z_2), f_{1,2}(z_2), f_{1,3}(z_2), f_{1,4}(z_2), \dots$$

• To zaporedje je omejeno, zato $\exists$ konvergentno podzaporedje:

$$f_{1,n_1}(z_2), f_{1,n_2}(z_2), \dots, f_{1,n_k}(z_2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(z_2)$$

Poimenujemo to podzaporedje v:

$$f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, \dots \quad (2. \text{ generacija})$$

Nadaljujemo. Dobimo:

1. generacija	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$f_{1,3} \dots$	konvergirata v točki z_1 ;
2. gen.	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	$f_{2,3} \dots$	konvergirata v z_1 in z_2 ;
3. gen.	$f_{3,1}$	$f_{3,2}$	$f_{3,3} \dots$	konv. v z_1, z_2, z_3 ;

Lastnosti: - zaporedje v n -ti generaciji konvergirata v točki z_n k neki vrednosti $f(z_n) \in \mathbb{C}$.

- zaporedje v n -ti generaciji je podzaporedje zaporedja v $(m+1)$ -ti generaciji; torej

$$\{f_{n,j}\}_{j=1, \dots, \infty} \subset \{f_{m,j}\}_{j=1, \dots, \infty}, \quad n > m.$$

Zato konvergirata v istih točkah

$$z_1, \dots, z_m \text{ k vrednostim } f(z_1), \dots, f(z_m).$$

Sedaj si ogledamo diagonalno zaporedje

$$h_n = f_{n,n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

z izjemo prvih $n-1$ členov

je $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ podzaporedje

zaporedja $\{f_{n,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$

v n -ti generaciji.

$\otimes$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	...
$\circ$	$\otimes$	$\circ$	$\circ$	...
$\circ$	$\circ$	$\otimes$	$\circ$	...
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\otimes$	...
...	...	...	...	...

Zato $\{h_j\}$ konvergira v točki z_n :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h_j(z_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_{n,j}(z_n) = f(z_n).$$

Topošeni, da zaporedje funkcij $h_j = f_{j,j}$ konvergira v vsaki točki z_n iz števne množice $\{z_n\} \subset K$.

Opomba: Zgornja konstrukcija se imenuje diagonalni proces in je zelo pogosto uporabljen argument v matematični analizi.

Drugi del dokaza: Trdimo, da zaporedje

$$\{f_{k,k}(z)\}_{k \in \mathbb{N}} = \{h_k(z)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergira}$$

v vsaki točki $z \in K$ k neki limiti $f(z) \in \mathbb{C}$

ter da je konvergenca $h_k \rightarrow f$ enakomerna na K .

Za dokaz 1. trditve je dovolj pokazati, da je zaporedje $\{h_k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyovo.

Izberemo $\varepsilon > 0$. Po predpostavki o ~~enaki~~ enakomernosti obstaja $\delta > 0$, da velja:

$$z, z' \in K, |z - z'| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \varepsilon/3, \\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Ta ocena velja tudi za vsako fn. h_k .

Ker je $\overline{\{z_j\}} = K$, obstaja za dano $z \in K$ točka z_j , da je $|z - z_j| < \delta$.

Ker je zaporedje $\{h_k(z_j)\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergentno, je Cauchyovo:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \exists: k, k' \geq k_0 \Rightarrow |h_k(z_j) - h_{k'}(z_j)| < \varepsilon/3.$$

Sedaj ocenimo:

$$\begin{aligned} |h_k(z) - h_{k'}(z)| &\leq |h_k(z) - h_k(z_j)| \\ &\quad + |h_k(z_j) - h_{k'}(z_j)| \\ &\quad + |h_{k'}(z_j) - h_{k'}(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pri in tretji delu smo ocenili s pomočjo enakozveznosti, pri drugem delu pa smo upoštevali, da je zaporedje $\{h_k(z_j)\}_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyovo.

To pokaže, da je $\{h_k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyovo in zato konvergentno. Opazimo

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(z).$$

Dokaz, da $h_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ enakomerno na K :

(naslednji stran).

Izberemo

$\varepsilon > 0$; dajemo $\delta > 0$ $\exists$,

$$|z - z'| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \varepsilon/3$$

$$\forall f \in \mathcal{F}.$$

Torej $|h_k(z) - h_k(z')| < \varepsilon/3, \quad k=1, 2, \dots$

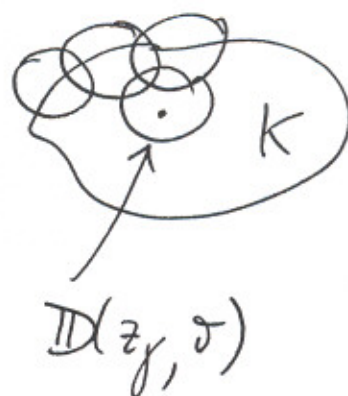
$$\Rightarrow |f(z) - f(z')| \leq \varepsilon/3.$$

Ker je K kompaktna, obstajajo točke $z_1, \dots, z_n \in K$,
tako da krogle $\mathbb{D}(z_1, \delta), \dots, \mathbb{D}(z_n, \delta)$ pokrivajo K .

Izberemo k_j ($j=1, \dots, n$) tako, da

$$k > k_j \Rightarrow |h_k(z_j) - f(z_j)| < \varepsilon/3.$$

$$k_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{k_1, \dots, k_n\}.$$



$k > k_0$; $\forall z \in K, \exists z_j$ $|z - z_j| < \delta$.

$$|f(z) - h_k(z)| < |f(z) - f(z_j)| + |f(z_j) - h_k(z_j)| + |h_k(z_j) - h_k(z)|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ konvergenca $h_k \rightarrow f$ enakomerna;

$\Rightarrow f$ zvezna (ista ocena kot za $\mathcal{F}$).

II.4. MONTELOV IZREK

~~2020~~ - 2021 -

Definicija: Družina $\mathcal{F}$ zveznih funkcij na domenu $\Omega \subset \mathbb{C}$ je normalna družina, če vsako zaporedje $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ vsebuje neko podzaporedje $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, ki konvergira enakomerno na kompaktnih v Ω (torej v topologiji na $\mathcal{C}(\Omega)$).

Opomba: da se dokazati, da je $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ normalna družina natanko tedaj, ko je ryen^o zap^{or}je $\overline{\mathcal{F}}$ v $\mathcal{C}(\Omega)$ kompaktna podmnožica v $\mathcal{C}(\Omega)$.

IZREK (Posledica izreke Arzela-Ascoli).

Če je $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ družina funkcij, ki ^{so} ~~je~~ enakomerni in enako zvezne na vsakem kompaktni $K \subset \Omega$, potem je $\mathcal{F}$ normalna družina.

Dokaz. Naj bo $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$ normalno izčrpanje in $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$. Za vsak $j \in \mathbb{N}$ obstaja podzaporedje zap. $\{f_n\}$, ki konvergira enakomerno na K_j . Z diagonalnim postopkom najdemo podzaporedje, ki konvergira enakomerno na vsakem kompaktni K_j , $j=1, 2, 3, \dots$.

IZREK (Montel).MONTÉLOV IZREK

Naj bo $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ družina holomorfnih funkcij, ki je enako omejena na vsakem kompaktnu $\omega \subset \Omega$. Potem je $\mathcal{F}$ normalna družina.

Dokaz: Dovolj je videti, da je $\mathcal{F}$ tudi enakozvezna na vsakem kompaktnu $K \subset \Omega$.

Zberemo $\varepsilon > 0$ dovolj majhen, da je množica

$$K_{2\varepsilon} = \{z \in \Omega \mid d(z, K) = \inf_{w \in K} |z-w| \leq 2\varepsilon\}$$

kompaktno vsebovana v Ω ($\circ K$, če je $2\varepsilon > d(K, \Omega^c)$)

za vsako točko $a \in K_{2\varepsilon} = \{z \in \Omega \mid d(z, K) \leq 2\varepsilon\}$

je krog $\overline{D}(a, \varepsilon)$ vsebovan v $K_{2\varepsilon}$.

zato je $|f'(a)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{|z-a|=\varepsilon} |f(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{K_{2\varepsilon}}$

za $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (Cauchyeva ocena). Ker je

$$\|f\|_{K_{2\varepsilon}} \leq M, \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad (\text{za nek } M > 0),$$

$$\text{sledi } \|f'\|_{K_{\varepsilon}} \leq \frac{M}{\varepsilon} = M', \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Naj bosta $z, w \in K$ poljubni točki; ki
zadostata $|z-w| < r$. Potem je daljica
 $[z, w]$ s krajščema z, w cela vsebovana v K_r
zato:

$$|f(w) - f(z)| = \left| \int_z^w f'(s) ds \right| \leq |w-z| \cdot \sup_{s \in [z, w]} |f'(s)|$$

↑
integral
po daljici $[z, w]$

$$\leq M' \cdot |w-z|.$$

Torej je družina $\mathcal{F}|_K = \{f|_K : f \in \mathcal{F}\}$
enakovredna na K .

Naloge: Dokazati: $\subset \mathcal{H}(U)$

1. REK: Če je $\mathcal{F}$ normalna družina, je za
vsak $k \in \mathbb{N}$ družina k -tih odvodov

$$\{f^{(k)} | f \in \mathcal{F}\}$$

tudi normalna družina.

2. REK: Če $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ enakomerno na kompaktnih
 $U \subset \mathbb{C}$, $f_n \in \mathcal{H}(U)$, potem

$$f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)} \text{ enakomerno na kompaktnih } U, \forall k \in \mathbb{N}.$$

IZREK (Hurwitz).

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{C}$ povezano območje in
 $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ zaporedje injektivnih hol.
funkcij, ki konvergira enakomerno na kompaktnih
k limitni f_n . $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Če f ni konstantna, potem je f tudi injektivna.

Dokaz. Denimo, da je f nekonstantna in ne-injektivna.

Tedaj $\exists z_1, z_2 \in \Omega$, $z_1 \neq z_2$, $f(z_1) = f(z_2) = b$.

Ker f ni konstantna, $\exists r > 0$, tako da velja

$$f^{-1}(b) \cap \overline{\mathbb{D}(z_j, r)} = \{z_j\}, \quad j=1,2.$$

$$\text{Naj bo } \eta_j = \inf_{|z - z_j| = r} |f(z) - b| > 0; \quad j=1,2.$$

Če je $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ taka, da je $|g - f| < \eta_j$ na krožnici
 $\{|z - z_j| = r\}$, potem ima po Rouchéjevem izreku

enaka $g(z) = b$ toliko rešitev na disku
 $z \in \mathbb{D}(z_j, r)$ kot enaka $f(z) = b$; torej vse eno.

Ker $f_n \rightarrow f$ enakomerno na kompaktnih,
sledi za dovolj velike n , da ima $f_n = b$ vsaj
eno rešitev na vsakem od krogov $\mathbb{D}(z_j, r)$
za $j=1,2$. Protislovi, saj je f_n injektivna.

II. 5. Riemannov upodobitveni izrek.

IZREK. Naj bo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ povezano in enostavno povezano območje, ki ni enake vsej ravnini. Za vsako točko $a \in \Omega$ obstaja natanko ena biholomorfnost (= konformna) preslika

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ na disk $\mathbb{D}$, ki zadošča

$$f(a) = 0, \quad f'(a) > 0.$$

Posledice. Vsako enostavno povezano območje

$\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ je konformno ekvivalentno disku $\mathbb{D}$.

Dokaz. $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{D} \mid \begin{array}{l} \text{holomorfnost} \\ f \text{ injektivna, } f(a)=0, \\ f'(a) > 0 \end{array} \right\}$.

Dokazeli bomo $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Očitno je $\mathcal{F}$ normalna družina, saj $|f| < 1$, $\forall f \in \mathcal{F}$.

Ne Cauchyove ocene sledi:

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(a) \in (0, \infty)$$

(supremum odvodov je končen). Iskamo f bomo našli kot rešitev ekstremalnega problema

$$f'(a) = \alpha.$$

1. kerch: $\mathbb{F} \neq \emptyset$. - 2. 26 -

za dokaz je dovolj najti injektivno holomorfnu funkcijo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, ki je omejena na Ω .

Tedaj je

$$g(z) \equiv \frac{c}{f'(a)} \cdot (f(z) - f(a))$$

v $\mathbb{F}$ za primerno majhen $c > 0$.

Recimo najprej, da $\overline{\Omega} \neq \mathbb{C}$. Tedaj obstaja disk $\mathbb{D}(b, r) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$. Funkcija $z \rightarrow \frac{1}{z-b}$ je omejena, injektivna hol. na Ω .

v splošnem primeru izberemo točko $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ ($\Omega \neq \mathbb{C}$!) in si ogledamo obe veji kerena funkcije ~~z~~ $z-b$ na Ω :

$$f(z) = \sqrt{z-b} = e^{\frac{1}{2} \cdot \log(z-b)}$$

$$g(z) = -\sqrt{z-b} = e^{-\frac{1}{2} \cdot \log(z-b)}; \quad z \in \Omega$$

Funkcija $\log(z-b)$ je dobro def. na Ω , ker je $\pi_1(\Omega) = 0$.

Poizvedemo je preveriti, da sta f in g injektivni hol. ter $f(\Omega) \cap g(\Omega) = \emptyset$.

Torej je $\Omega' = f(\Omega) \subset \mathbb{C}$ množica, ki je konformno ekvivalentna Ω in $\overline{\Omega'} \neq \mathbb{C}$ (saj je $g(\Omega) \subset (\Omega')^c$).

Po prejšnjem obstaja omejena injektivna hol. fu.

h na Ω' ; $h \circ f$ je dobra na Ω .

2. korak. $\alpha = \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(a) \in (0, \infty)$.

Za vsak n obstaja $f_n \in \mathcal{F}$, da velja

$$\alpha - \frac{1}{2^n} < f_n'(a) \leq \alpha.$$

Ker je $\mathcal{F}$ normalna družina, obstaja konvergentno podzaporedje

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}.$$

$$\text{Velja: } f'(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}'(a) = \alpha \in (0, \infty).$$

Torej je f nekonstantna, zato je po Hurwitzovem izreku injektivna.

Če def. sledi $f(\mathcal{D}) \subset \mathbb{D}$. Po izreku o odprti preslikavi (ali po principu maks.) sledi $f(\mathcal{D}) \subset \mathbb{D}$.

Torej je $f \in \mathcal{F}$,

$$f'(a) = \sup_{h \in \mathcal{F}} h'(a).$$

$$= \sup \left\{ |h'(a)| : h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{D} \text{ injektivna holo, } h(a) = 0 \right\}.$$

3. korak. Trdimo, da je f konstruirana v 2 koraku surjektivna: $f(\Omega) = \mathbb{D}$.

Recimo, da to ni res; torej $\exists b \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$.
Ker je $f(a) = 0$, je $b \neq 0$.

Naj bo $\varphi(z) = \frac{b-z}{1-\bar{b}z}$; $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{D}$;

$$\varphi(0) = b, \quad \varphi(b) = 0, \quad \varphi'(0) = |b|^{-2}.$$

Funkcija $\varphi \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ je injektivna holo,
lvez ničel na Ω .

Torej obstaja $g(z) = \sqrt{\varphi \circ f(z)}$, $z \in \Omega$.

g injektivna holo,

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{D}; \quad g(a) = \sqrt{b} \in \mathbb{D}.$$

Naj bo $\psi(z) = \frac{z - \sqrt{b}}{1 - \sqrt{b}z}$; $\psi \in \text{Aut } \mathbb{D}$

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \psi \circ g = \psi(\sqrt{\varphi \circ f}).$$

$h: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ injektivna holo;

$$h(0) = \psi(g(0)) = \psi(\sqrt{b}) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 h'(a) &= \psi'(\sqrt{b}) \cdot g'(a) \\
 &= \psi'(\sqrt{b}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varphi(f(a))}} \cdot \varphi'(0) \cdot f'(a) \\
 &= C \cdot f'(a)
 \end{aligned}$$

Preracun:

$$\begin{aligned}
 \psi'(\sqrt{b}) &= \frac{1}{1-|b|} \\
 \varphi'(0) &= |b|^2 - 1 = (|b|-1)(|b|+1) \\
 2\sqrt{\varphi(f(a))} &= 2\sqrt{\varphi(0)} = 2\sqrt{b}
 \end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
 |C| &= \frac{1}{1-|b|} \cdot \frac{1}{2\sqrt{|b|}} \cdot (1-|b|)(1+|b|) \\
 &= \frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}} > 1,
 \end{aligned}$$

Say $\mu \quad 1+|b|-2\sqrt{|b|} = (1-\sqrt{|b|})^2 > 0.$

Then $|C| > 1, |h'(a)| > |f'(a)| = \alpha.$

To je protislozje z izborom fn. f u
 lezemu 2. $(f'(a) = \sup \{ |h'(a)| : h \in \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \}$
 u izbj. $h(a)=0$

Opomba (1°) Endičnost f je očitna:

če je $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ biholo, $g(a) = 0$, $g'(a) > 0$,

je $\varphi = g \circ f^{-1} \in \text{Aut } \mathbb{D}$,
 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$.

Torej je $\varphi = \text{identiteta}$.

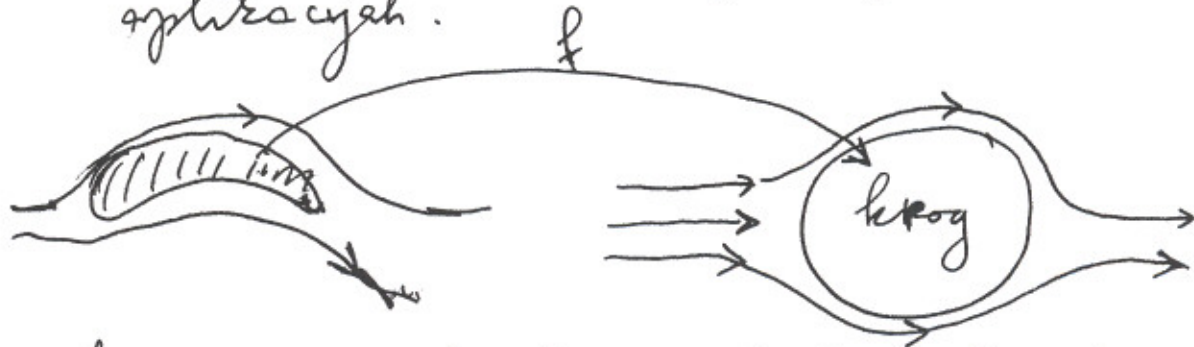
(2°) Če je $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ biholomorfa, in

je $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{D}$, je tudi $\varphi \circ f$ biholomorfa.

~~Torej~~ Obratno, vsaka danga biholomorfa
preslikava $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ je oblike

$$g = \varphi \circ f, \quad \varphi \in \text{Aut } \mathbb{D}.$$

(3°) Riemannov izrek je uporaben v
aplikacijah.



Laminarni tok okrog objekta (zrak, tekočina).
Preslikamo na krog in studiramo
modelni primer.