

5 Ločljivost

Naloga 5.1. Naj bo $\mathcal{B} := \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Pokažite, da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije τ na $\mathbb{R}$.
- (b) Obravnavajte konvergenco zaporedja $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ v prostoru $(\mathbb{R}, \tau)$.
- (c) Ugotovite, ali je prostor $(\mathbb{R}, \tau)$ separabilen, 1-števen oz. 2-števen.
- (d) Ugotovite, katerim ločljivostnim lastnostim zadošča prostor $(\mathbb{R}, \tau)$.

Naloga 5.2. Naj bo X neskončna množica in naj bo $p \in X$. Množico X opremimo s topologijo

$$\tau := \{U \subseteq X \mid U^c \text{ je končna množica} \vee p \in U^c\}.$$

- (a) Dokažite, da je prostor (X, τ) Hausdorffov.
- (b) Dokažite: če je množica X neštevna, tedaj točka p nima števne baze okolic.
Nasvet. Pri privzetku, da je $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ števna baza okolic za točko p , dokažite, da obstaja $q \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$, $q \neq p$, in iz tega sklepajte na protislovje.
- (c) Dokažite, da je mogoče prostor (X, τ) vložiti v prostor realnih števil $\mathbb{R}$ natanko tedaj, ko je X števna množica.

Naloga 5.3. Dokažite naslednji izjavi za vse topološke prostore X .

- (a) Prostor X je Fréchetov natanko tedaj, ko je za vsak $x \in X$ enojec $\{x\}$ enak preseku vseh okolic točke x .
- (b) Prostor X je Hausdorffov natanko tedaj, ko je za vsak $x \in X$ enojec $\{x\}$ enak preseku vseh **zaprtih** okolic točke x .

Naloga 5.4. Naj bo X topološki prostor in $Y := X \cup \{*\}$, kjer $* \notin X$. Označimo

$$\tau := \{U \cup \{*\} \mid U \text{ odprta podmnožica } X\} \cup \{\emptyset\}.$$

- (a) Preverite, da je τ topologija na Y .
- (b) Ugotovite, ali je vključitev $X \hookrightarrow Y$ zvezna, odprta oz. zaprta preslikava.
- (c) Dokažite, da je prostor Y separabilen (ne glede na izbiro prostora X).
- (d) Za vse $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ugotovite resničnost izjave:

Če prostor X zadošča lastnosti T_i , potem tudi Y zadošča T_i .

Naloga 5.5. Množico $\mathbb{R}^2$ opremimo z leksikografsko urejenostjo, tj. $(a, b) < (c, d)$ velja tedaj, ko je $a < c$ ali pa je $a = c$ in $b < d$. Naj bo

$$U_{(a,b),(c,d)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b) < (x, y) < (c, d)\}.$$

- Pokažite, da je $\mathcal{B} := \{U_{(a,b),(c,d)} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2, (c, d) \in \mathbb{R}^2, (a, b) < (c, d)\}$ baza neke topologije τ na $\mathbb{R}^2$.
- Ali je prostor $(\mathbb{R}^2, \tau)$ separabilen, 1-števen, 2-števen?
- Katerim ločljivostnim lastnostim zadošča prostor $(\mathbb{R}^2, \tau)$?
- Ali je prostor $(\mathbb{R}^2, \tau)$ homeomorfen netrivialnem produktu dveh topoloških prostorov?

Naloga 5.6. Raziščite ločljivostne lastnosti naslednjih prostorov:

- končna množica, opremljena s topologijo končnih komplementov,
- neskončna množica, opremljena s topologijo končnih komplementov,
- Sorgenfreyeva premica $\mathbb{R}_S$,
- Sorgenfreyeva ravnina $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ (za lastnost T_4 glejte naslednjo nalogo).

Naloga 5.7. Naj bosta $A := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ in $B := \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Q}\}$ podmnožici Sorgenfreyeve ravnine $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.

- Dokažite, da sta A in B zaprti v $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$.
- Dokažite, da za vsako odprto okolico U podmnožice A obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je (izračunano v evklidski premici $\mathbb{R}$) notranjost zaprtja množice

$$K_n := \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \left[x, x + \frac{1}{n}\right) \times \left[-x, -x + \frac{1}{n}\right) \subseteq U\right\}$$

neprazna.

Nasvet. Tu se lahko skličete na **Bairov izrek o kategoriji** (gl. izrek 2.44 iz Mrčunove knjige oz. izrek 2.38 iz Pavešičeve knjige). Bairov izrek ima več oblik; za to nalogo je primerna naslednja: števna unija nikjer gostih podmnožic polnega metričnega prostora ima prazno notranjost (podmnožica je **nikjer gosta**, kadar je notranjost njenega zaprtja prazna). Opazimo: $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

- Dokažite, da za vsako odprto okolico U podmnožice A in vsako odprto okolico V podmnožice B velja $U \cap V \neq \emptyset$. Sklepajte, da Sorgenfreyeva ravnina ni T_4 in da T_4 ni multiplikativna lastnost.