

Vsebina predmeta

Uvod: Diferencialna enačba prvega reda, fazni prostor, vektorska polja na faznem prostoru, integralske krivulje vektorskih polj. Osnovni primeri diferencialnih enačb. Prvi integral enačbe. Parametrično reševanje in singularne rešitve. Clairautova enačba. Primeri uporabe.

Obstoj rešitev in njihova odvisnost od začetnih pogojev. Splošna rešitev. Tok navadne diferencialne enačbe prvega reda.

Sistemi linearnih diferencialnih enačb prvega reda. Linearizacija v okolici rešitve. Tok homogenega sistema linearnih enačb. Liouvillova formula. Reševanje sistemov s konstantnimi koeficienti. Reševanje linearne enačbe višjega reda s konstantnimi koeficienti. Vsiljeno oziroma dušeno nihanje. Singularne točke linearnega sistema. Osnove teorije stabilnosti.

Variacijski račun: Nekaj primerov variacijske naloge. Pojem Banachovega prostora. Linearni operatorji med Banachovimi prostori. Odvod operatorja med Banachovima prostoroma. Stacionarne točke funkcionala. Osnovni izrek variacijskega računa. Euler-Lagrangejeva enačba in njeno reševanje. Legendrova transformacija in kanonski sistem. Naloga s prostima krajiščema. Izoperimetrična naloga. Lagrangejeva naloga.

Osnovna literatura

- F. Križanič: Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun, DZS, Ljubljana, 1974.
- E. Zakrajšek: Analiza III, DMFA založništvo, Ljubljana, 2002.
- V. I. Arnold: Ordinary Differential Equations, MIT Press, Cambridge, 1978.
- P. Hartman: Ordinary differential equations. Reprint of the second edition. Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.
- S. Lefschetz: Differential Equations: Geometric Theory, 2nd edition, Dover Publications, New York, 1977.
- L. Perko: Differential Equations and Dynamical Systems, 3rd edition, Springer-Verlag, New York, 2004.
- W. Walter: Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1998.

Uvod. Navadne diferencialne enačbe, in še posebej sistemi takih enačb, so pomembno matematično orodje za opisovanje in razumevanje naravnih pojavov.

V fizikalnem jeziku so tovrstni problemi formulirani kot *dinamični sistemi*. Opazujemo delec ali skupino delcev, ki se giblje v prostoru pod vplivom raznih sil, npr. gravitacije, elektromagnetnega polja ipd. Teorija dinamičnih sistemov se uporablja tudi v vrsti drugih področij kot so mehanika trdne snovi in tekočin (npr. vremenski sistemi), inženirske vede, biologija (rast organizmov), finance, idr. Problemi so raznoliki:

- opisati *trajektorijo* posameznega delca, to je krivuljo v prostoru, ki jo delec opiše;
- razumeti globalno obnašanje trajektorij, ko gre čas $t \rightarrow \pm\infty$;
- opisati množico vseh trajektorij – *fazni portret sistema*;
- razumeti (ne-) stabilnost sistema glede na perturbacije;
- razumeti nezvezne spremembe v sistemu kot so *bifurkacije*;
- študij *kaotičnih pojavov* kot so *čudni atraktorji*, ipd.

Med pomembne probleme, ki so vodili v razvoj področja diferencialnih enačb in dinamičnih sistemov, sodijo tisti v nebesni mehaniki, še posebej študij gibanja teles v sončnem sistemu in širše.

Newtonovi napori razumeti in modelirati njihovo gibanje so vključevali Keplerjeve zakone in so bistveno prispevali k razvoju diferencialno-integralnega računa. Ne glede na eleganco in preprostost fizikalnih enačb je analiza obnašanja rešitev dinamičnih sistemov običajno zelo zahtevno opravilo, ki je zaposlovalo največje matematične in fizikalne ume tekom vrste stoletij.

Razvita je bila dokaj popolna teorija linearnih sistemov, ki pogosto predstavljajo dober približek pravih (nelinearnih) sistemov v nekem manjšem območju, npr. v majhni okolici posamične trajektorije. Po drugi strani pa ostaja globalna nelinearna teorija izven našega dometa celo danes, kljub bistveni vlogi zmogljivih računalnikov. Izjema so perturbacijske metode za analizo sistemov, ki so blizu linearnim, kot npr. analiza faznih portretov v okolici stacionarnih točk in periodičnih rešitev.

Matematična analiza je bila glavno orodje za reševanje problemov nebesne mehanike in sorodnih dinamičnih sistemov vse do pionirskega dela Henrija Poincaréja na prelomu 19. in 20. stoletja. Poincaré je pokazal, da analitične perturbacijske metode včasih ne dajo pravih rešitev zaradi problemov konvergence vrst, ki naj bi dale rešitve. Probleme je zato skušal rešiti s kombinacijo analitičnih, geometrijskih in topoloških metod in je s tem razvil bistveno nov kvalitativen (za razliko od zgolj kvantitativnega) pristop v študiju diferencialnih enačb.

Moderne metode kvalitativne teorije in analize sistemov diferencialnih enačb so osnovane na delih pionirjev matematike 20. stoletja kot so *Henri Poincaré*, *George David Birkhoff*, *David Hilbert*, *Émil Picard*, *Aleksander Lyapunov*, *Aleksander Andronov*, *Vladimir Arnold*, *Stephen Smale* ter mnogi drugi.

Med slovenskimi matematiki so se z diferencialnimi enačbami največ ukvarjali *Jurij Vega*, *Josip Plemelj* in *Ivan Vidav*.

Dodatna literatura

- J. Guckenheimer, P. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*. Applied Math. Sci., 42, Springer-Verlag, New York, 1983 & 1990.
- M. Shub: *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- G. Teschl: *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Math., 140. Amer. Math. Soc., Providence, 2012.
- C. L. Siegel, J. K. Moser: *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1971 & 1995.

Vsebina 1. predavanja

V tem predavanju se spoznamo z nekaterimi osnovnimi pojmi in primeri.

- (1) Kaj je diferencialna enačba?
- (2) Geometrijska in fizikalna interpretacija
- (3) Nekaj primerov
- (4) Splošna navadna diferencialna enačba prvega reda
- (5) Navadna diferencialna enačba višjega reda
- (6) Primer: prosti pad z majhne višine
- (7) Primer: prosti pad z velike višine
- (8) Parcialne diferencialne enačbe (PDE)

Kaj je diferencialna enačba?

Navadna diferencialna enačba 1. reda:

$$y' = f(x, y).$$

Tu je f funkcija, definirana na nekem območju D v ravnini $\mathbb{R}_{(x,y)}^2$.

Rešitev enačbe je vsaka odvedljiva funkcija $y = y(x)$ na nekem nepraznem intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, ki zadošča enačbi:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}(x) = f(x, y(x)), \quad x \in (a, b).$$

Začetni problem: dana je točka $(x_0, y_0) \in D$. Iščemo rešitev enačbe na nekem intervalu $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ okrog točke $x_0 \in I$, ki ima pri $x = x_0$ vrednost $y(x_0) = y_0$:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Pravimo, da gre rešitev skozi točko (x_0, y_0) .

Geometrijska in fizikalna interpretacija

Geometrijska interpretacija: Iščemo odvedljive funkcije $y(x)$ z lastnostjo, da je v poljubni točki x naklonski koeficient grafa $x \rightarrow (x, y(x))$, torej odvod $y'(x)$, enak vrednosti $f(x, y(x))$.

Funkcija $f(x, y)$ torej podaja polje naklonskih koeficientov, rešitev pa je vsaka funkcija, ki se v poljubni točki $(x, y(x))$ dotika tega polja v smislu, da je tangentna na premico skozi točko $(x, y(x))$ z naklonskim koeficientom $f(x, y(x))$.

Fizikalna interpretacija: Neodvisno spremenljivko $x = t$ si predstavljamo kot časovno spremenljivko. Iščemo odvedljive funkcije $y(t)$, ki predstavljajo pozicijo gibajoče točke (v eni dimenziji) v odvisnosti od časa, tako da je v poljubnem trenutku t hitrost gibanja $\dot{y}(t) = dy(t)/dt$ enaka vrednosti $f(t, y(t))$.

Primer 1.

$$y' = f(x).$$

Rešitve so primitivne funkcije (oziroma nedoločeni integrali) funkcije f :

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

Družina rešitev je enoparametrična, odvisna od izbire konstante C . Ta družina se imenuje **splošna rešitev**; posamična članica družine je **partikularna rešitev**.

Če je f zvezna funkcija na nekem intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, potem lahko s pomočjo Leibnizove formule najdemo za vsako točko $x_0 \in (a, b)$ rešitev z integracijo:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in (a, b).$$

To so tudi vse rešitve dane diferencialne enačbe. Družina rešitev torej sestavlja enoparametrično družino, parametrizirano s konstanto y_0 , ki predstavlja vrednost dane rešitve v začetni točki $x = x_0$.

Če funkcija f ni zvezna v neki točki x_0 , potem v okolici te točke enačba nima nujno rešitve, kot vemo iz primerov iz predmeta Analiza 1.

Primer 2.

$$y' + 2xy = 0, \quad y' = -2xy.$$

Funkcija $f(x, y) = -2xy$ je definirana na vsej ravnini $\mathbb{R}^2$.

Rešitve:

$$y(x) = Ce^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Preverimo:

$$y'(x) = Ce^{-x^2}(-2x) = -2xCe^{-x^2} = -2xy(x).$$

Poleg tega je $y(0) = Ce^0 = C$, torej je za poljuben $y_0 \in \mathbb{R}$ funkcija $y(x) = y_0e^{-x^2}$ rešitev začetnega problema

$$y' + 2xy = 0, \quad y(0) = y_0.$$

Naloga: Skiciraj grafe te enoparametrične družine rešitev.

Konstruktivna pot do rešitve Oglejmo si ponovno enačbo

$$y' + 2xy = 0.$$

Iščemo rešitev $y(x)$, ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = y_0 \neq 0$.

V okolici točke $(0, y_0)$ lahko enačbo delimo z y in jo zapišemo v obliki

$$\frac{y'}{y} = (\log y)' = (\log |y|)' = -2x.$$

Tu je $\log$ naravni logaritem. Z uvedbo nove spremenljivke $v = \log |y|$ dobimo enačbo

$$v' = -2x, \quad v(x) = c + \int_0^x (-2t) dt = c - x^2.$$

Odtod dobimo rešitev prvotne enačbe:

$$y(x) = \pm e^{v(x)} = \pm e^{c-x^2} = Ce^{-x^2}, \quad C = \pm e^c = y_0.$$

Ta metoda reševanja se imenuje **metoda separacije spremenljivk**.

Splošna navadna diferencialna enačba prvega reda. Naj bo $F(x, y, z)$ funkcija na neki domeni v $\mathbb{R}^3$. Ta funkcija določa diferencialno enačbo

$$F(x, y, y') = 0.$$

Njena rešitev je vsaka odvedljiva funkcija $y(x)$, ki zadošča enačbi

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

na svojem definicijskem intervalu.

Denimo, da je F zvezno parcialno odvedljiva v okolici točke (x_0, y_0, z_0) in velja

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Izrek o implicitni funkciji tedaj pove, da ima v okolici te točke enačba $F(x, y, z) = 0$ enolično rešitev oblike $z = f(x, y)$, $f(x_0, y_0) = z_0$. Torej je zgornja diferencialna enačba v neki okolici točke (x_0, y_0, z_0) ekvivalentna enačbi

$$y' = f(x, y).$$

Splošna diferencialna enačba prvega reda. Implicitna enačba

$$F(x, y, y') = 0$$

lahko podaja več različnih lokalnih enačb oblike $y' = f(x, y)$, ali pa nobene. Na primer, enačba

$$y'^2 + y^2 + 1 = 0$$

očitno nima nobene rešitve med realnimi funkcijami.

Enačba

$$y'^2 - 5y' + 6 = 0$$

razpade na dve enačbi, $y' = 2$ in $y' = 3$, s pripadajočima družinama rešitev

$$y = 2x + C, \quad y = 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Enačbo

$$y'^2 = |y| \iff y' = \pm \sqrt{|y|}$$

bomo obravnavali v nadaljevanju.

Navadna diferencialna enačba višjega reda. Naj bo $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ naravno število.

Navadna diferencialna enačba n -tega reda je enačba oblike

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

ali v implicitni obliki

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Rešitev je vsaka n -krat odvedljiva funkcija $y(x)$, ki zadošča dani enačbi.

Primer. • Enačba

$$y'' + y = 0$$

ima rešitve

$$y(x) = A \cos x + B \sin x$$

za poljubni vrednosti $A, B \in \mathbb{R}$. To je primer linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti.

- Funkcija $y(x) = e^x$ je za poljuben $n \in \mathbb{N}$ rešitev enačbe $y^{(n)} = y$.

Primer: prosti pad z majhne višine Opazujemo telo v gravitacijskem polju. Njegova višina $y(t)$ (to je oddaljenost od privlačnega telesa) zadošča diferencialni enačbi

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

kjer je g gravitacijska konstanta. To je diferencialna enačba drugega reda, ki pove, da je pospešek enak konstanti $-g$. Rešitve najdemo z dvakratno integracijo:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \dot{y}_0 - \int_0^t g ds = \dot{y}_0 - gt, \\ y(t) &= y_0 + \int_0^t (\dot{y}_0 - gs) ds = y_0 + \dot{y}_0 t - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

Pri tem konstanti y_0 in $\dot{y}_0$ določata začetno pozicijo in hitrost:

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Primer: prosti pad z velike višine. Zgornja enačba je poenostavitev enačbe za prosti pad, ki sledi iz Newtonovega gravitacijskega zakona. Slednji pravi, da se telesi z masama m_1, m_2 v medsebojni razdalji y privlačita s silo

$$F = g \frac{m_1 m_2}{y^2},$$

kjer je g gravitacijska konstanta. Denimo, da je masa m_1 prvega telesa bistveno manjša od mase m_2 drugega telesa (npr. Zemlje). Po drugem Newtonovem zakonu pospešek zadošča enačbi $F = -m_1 \ddot{y}$ oz.

$$\ddot{y} = -\frac{gm_2}{y^2} = -\frac{\gamma}{y^2}.$$

Rešitev skušajmo poiskati z nastavkom $y(t) = at^b$. Če vstavimo v enačbo, dobimo

$$ab(b-1)t^{b-2} = -\gamma a^{-2}t^{-2b}.$$

Odtod sledi $b-2 = -2b$, torej $b = 2/3$ in $a = (9\gamma/2)^{1/3}$.

Preverimo lahko, da je vsaka funkcija

$$y(t) = a(c \pm t)^{2/3}, \quad a = (9\gamma/2)^{1/3}, \quad c \in \mathbb{R}$$

rešitev dane enačbe na $c \pm t > 0$. Odvod te rešitve je enak

$$\dot{y}(t) = \pm \frac{2}{3}a(c \pm t)^{-1/3}.$$

Denimo, da je

$$y(0) = ac^{2/3} > 0 \quad \text{in} \quad \dot{y}(0) = -\frac{2}{3}ac^{-1/3} > 0.$$

Tedaj je $y(c) = 0$, telo torej pade na tla v času $c = (y(0)/a)^{3/2}$. V drugem primeru

$$y(0) = ac^{2/3} > 0 \quad \text{in} \quad \dot{y}(0) = +\frac{2}{3}ac^{-1/3} > 0.$$

pri $t \rightarrow +\infty$ velja

$$y(t) = a(c+t)^{2/3} \rightarrow +\infty, \quad \dot{y}(t) = \frac{2}{3}a(c+t)^{-1/3} \rightarrow 0.$$

Torej se telo s to začetno pozicijo in začetno hitrostjo ne vrne na zemljo, ampak se od nje vse bolj oddaljuje z vse manjšo hitrostjo.

Parcialne diferencialne enačbe (PDE) V tem primeru iščemo funkcije $u(x_1, \dots, x_n)$ realnih spremenljivk $x_1, \dots, x_n$ za $n > 1$, ki zadoščajo določeni enačbi, ki povezuje vrednost funkcije ter njenih parcialnih odvodov do določenega reda $k \in \mathbb{N}$. Najvišji red odvodov, ki v enačbi nastopa, se imenuje *red diferencialne enačbe*.

Za poenostavitev oznak parcialne odvode pogosto označujemo s spodnjim indeksom, npr.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{yx}, \dots$$

Primeri PDE

Primer. 1. Enačba $u_x + u_y = x^2 + y$ je linearna nehomogena PDE prvega reda v dveh spremenljivkah. Linearna je zato, ker parcialni odvodi v njej nastopajo linearno, nehomogena pa, ker desna stran ni enaka nič.

2. Enačba $u_{xx} + u_{yy} = 0$ je linearna homogena PDE drugega reda, ki se imenuje **Laplaceova enačba**. Njene rešitve so **harmonične funkcije**. V n dimenzijah je Laplaceova enačba

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

3. Naj t označuje časovno spremenljivko in $x = (x_1, x_2, x_3)$ prostorske spremenljivke. Enačba

$$u_{tt} = c^2 \Delta u = c^2 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

je **valovna enačba**. To je ena od pomembnih enačb matematične fizike, ki opisuje nevsiljeno valovanje (elektromagnetno, nihanje strune, zvočno valovanje, ...). Konstanta $c > 0$ predstavlja hitrost potovanja valov skozi prostor. Pri vsiljenem nihanju imamo dodatni člen na desni:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + f(t, x, u).$$

4. Enačba

$$u_t = k \Delta u = k \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

je **toplotna enačba**. Njene rešitve opisujejo širjenje toplote v danem homogenem sredstvu (brez dovajanja toplote). Število k je toplotni koeficient snovi.

Vsebina 2. predavanja. V tem predavanju spoznamo nekaj osnovnih živalskih vrst diferencialnih enačb, ki jih lahko rešimo z eksplisitnimi metodami.

- (1) Eksplisitne metode reševanja
- (2) Metoda separacije spremenljivk
- (3) Nekaj primerov separabilnih enačb
- (4) Primer: singularnost v končnem času
- (5) Primeri z neskončno rešitvami začetnega problema
- (6) Uvedba nove spremenljivke
- (7) Homogene diferencialne enačbe
- (8) Primer uporabe: modeli rasti

(9) Logistična enačba

Eksplisitne metode reševanja. V nadaljevanju se bomo ukvarjali z navadnimi diferencialnimi enačbami (DE) in s sistemi takih enačb.

V večini primerov že za sorazmerno preproste DE ni mogoče najti eksplisitnih rešitev, ki bi se dale izraziti z elementarnimi funkcijami. Ta problem se pojavi celo pri integraciji najprostejših enačb

$$y' = f(x).$$

Rešitev je podana z integralom

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt,$$

vendar integrala v splošnem ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami niti za nekatere preproste funkcije, kot npr. $f(x) = e^{x^2}$.

Najprej si bomo ogledali nekaj konkretnih primerov, pri katerih lahko rešitve zapišemo z integrali danih funkcij v enačbi; to je v bistvu največ, kar lahko pričakujemo. V takem primeru pravimo, da lahko rešitev diferencialne enačbe najdemo z integracijami.

Metoda separacije spremenljivk

Oglejmo si DE oblike

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Na vsakem intervalu, kjer je $g(y) \neq 0$, jo lahko zapišemo v obliki

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Pravimo, da smo ločili spremenljivki x in y .

Splošna rešitev te enačbe je podana v implicitni obliki:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Partikularna rešitev $y = y(x)$, ki zadošča začetnemu pogoju $y(x_0) = y_0$, pa je rešitev naslednje implicitne enačbe za $y = y(x)$:

$$\int_{y_0}^y \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Utemeljitev postopka: Denimo, da je funkcija $y(x)$ rešitev dane enačbe z začetnim pogojem $y(x_0) = x_0$. Iz enačbe smo po ločitvi spremenljivk dobili

$$\frac{dy}{g(y)} = \frac{y'(x)dx}{g(y(x))} = f(x)dx.$$

Integrirajmo enačbo v mejah od x_0 do variabilne zgornje meje x , pri čemer integracijsko spremenljivko preimenujemo v t :

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t)dt}{g(y(t))} = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

V integralu na levi strani lahko uvedemo novo spremenljivo $s = y(t)$, $ds = y'(t)dt$. Nove meje integracije so $y(x_0) = y_0$ in $y(x)$. Tako dobimo

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

S tem smo dobili zadnjo formulo na prejšnji strani.

Zgodbo lahko tudi obrnemo: če funkcija $y(x)$ zadošča zgornji integralni identiteti, z odvajanjem po x vidimo, da $y(x)$ zadošča danemu začetnemu problemu.

Primer separabilne enačbe. Rešimo začetni problem

$$y' = xy \sin x, \quad y(0) = 1.$$

V neki okoliščini točke $x = 0$ bo tedaj $y(x) \neq 0$, zato lahko delimo z y :

$$\frac{dy}{y} = x \sin x dx.$$

Z integracijo dobimo

$$\begin{aligned} \log |y| &= \int x \sin x dx = - \int x d(\cos x) \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Odtod

$$y = c \exp(\sin x - x \cos x), \quad y(0) = c = 1.$$

Poseben primer separabilne enačbe. Enačba

$$y' = \frac{dy}{dx} = g(y)$$

je separabilna in jo (ob pogoju $g(y) \neq 0$) zapišemo takole:

$$\frac{dy}{g(y)} = dx, \quad \int \frac{dy}{g(y)} = x + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Konkreten primer:

$$y' = y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = dx, \quad -\frac{1}{y(x)} = x + c, \quad y(x) = -\frac{1}{x + c}$$

Rešitev začetnega problema $y' = y^2$, $y(0) = y_0$:

$$y_0 = y(0) = -\frac{1}{c}, \quad c = -\frac{1}{y_0}, \quad y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0 x}.$$

Če je $y_0 > 0$, potem rešitev obstaja na poltraku $-\infty < x < 1/y_0$ in velja

$$\lim_{x \rightarrow 1/y_0} y(x) = +\infty.$$

Primer: singularnost v končnem času

Podobno lahko vidimo, da ima za vsak $n = 1, 2, \dots$ začetni problem

$$y' = y^{n+1}, \quad y(0) = y_0 > 0$$

rešitev

$$\frac{dy}{y^{n+1}} = dx, \quad -\frac{1}{y^n} = x + c, \quad c = -\frac{1}{y_0^n}, \quad y(x) = \frac{y_0^n}{1 - y_0^n x},$$

ki ima singularnost pri $x = 1/y_0^n$ in velja

$$\lim_{x \nearrow 1/y_0^n} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x \searrow 1/y_0^n} y(x) = -\infty.$$

Edina izjema v tej družini je linearna enačba $y' = y$, $y(0) = x_0$ z rešitvijo

$$\frac{dy}{y} = dx, \quad \log |y| = x + c, \quad y = Ce^x = y_0 e^x,$$

ki obstaja za vse $x \in \mathbb{R}$.

Primer z neskončno rešitvami začetnega problema. Pri vseh do sedaj obravnavanih primerih smo opazili, da ima poljuben začetni problem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

natanko eno lokalno rešitev na nekem intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, ki vsebuje točko x_0 . Kasneje bomo dokazali, da to vselej velja, če je funkcija f dovolj gladka; npr., za vsako enkrat zvezno parcialno odvedljivo funkcijo.

Sedaj pa si oglejmo primer, kjer to ne velja. Opazujmo enačbo

$$y' = \sqrt{|y|}.$$

Funkcija na desni strani je zvezna, ni pa odvedljiva pri $y = 0$. Opazimo:

Če je $y(x)$ rešitev, je tudi $z(x) = -y(-x)$ rešitev.

$$z'(x) = -y'(-x)(-1) = y'(-x) = \sqrt{|y(-x)|} = \sqrt{|z(x)|}.$$

Odtod vidimo, da zadošča rešiti enačbo za $y \geq 0$.

Primer:

$$y' = 2\sqrt{|y|}.$$

Rešitve za $y > 0$:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx, \quad \sqrt{y} = x + c, \quad y(x, c) = (x + c)^2 \quad (x \in (-c, +\infty)).$$

Ta družina vsebuje vse nenegativne rešitve enačbe. Ker je $\sqrt{y} > 0$, dobljena formula ne da rešitev za $x < -c$.

Ker je za vsak rešitev $y(x)$ tudi $-y(-x)$ rešitev, dobimo s tem še rešitve

$$z(x, c) = -y(-x, c) = -(x - c)^2, \quad -\infty < x < c.$$

Rešitve na vsem $x \in \mathbb{R}$ dobimo s sestavljanjem zgornjih rešitev, kot t.i. **zlepke**. Na primer, za vsak $a \geq 0$ je funkcija

$$\phi(x, a) = \begin{cases} x^2 & \text{za } x > 0; \\ 0 & \text{za } -a \leq x \leq 0; \\ -(x + a)^2 & \text{za } x < -a \end{cases}$$

zvezno odvedljiva rešitev začetnega problema $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$, ki ni zvezno dvakrat odvedljiva v točkah $x = -a$ in $x = 0$. Poleg tega je funkcija $y(x) \equiv 0$ rešitev.

Primer:

$$y' = -2x(\operatorname{sgn} y)\sqrt{|y|}.$$

Tu je $\operatorname{sgn} y \in \{1, 0, -1\}$, če je $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$.

Funkcija na desni strani je liha v spremenljivki y . Odtod sledi, da je za vsako rešitev $y(x)$ tudi funkcija $-y(x)$ rešitev. Zato zadošča poiskati nenegativne rešitve $y \geq 0$. Ločimo spremenljivki in integrirajmo:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} = - \int 2x dx = C - x^2, \quad C > 0.$$

Ker je $\sqrt{y} > 0$, mora biti $C > 0$ in $x^2 < C$. Torej imamo družino rešitev

$$y(x, C) = \frac{1}{4}(C - x^2)^2, \quad x \in (-\sqrt{C}, \sqrt{C}), \quad C > 0.$$

Če funkcijo $y(x, C)$ razširimo na $\mathbb{R}$ s predpisom $y(x, C) = 0$ za $|x| \geq \sqrt{C}$, dobimo rešitev na vsem $\mathbb{R}$. Ta rešitev je enkrat zvezno odvedljiva povsod in je gladka izven $x = \pm\sqrt{C}$, v teh dveh točkah pa je njen drugi odvod nezvezen.

(V bistvu gre za zlepek dveh rešitev kot v prejšnjem primeru.)

Imamo tudi rešitve $-y(x, C)$ ter $y = 0$; drugih rešitev ni.

Grafi rešitev napolnijo ravnino. Skozi vsako točko (x_0, y_0) z $y_0 \neq 0$ gre natanko ena rešitev. Skozi točko $(x_0, 0)$ gre ena rešitev $y = 0$, če je $x_0 = 0$, ter neskončno rešitev, če je $x_0 \neq 0$.

Primer:

$$y' = e^y \sin x.$$

Najprej preverimo naslednje: če je $y(x)$ rešitev, potem so rešitve tudi funkcije

$$u(x) = y(-x), \quad v_k(x) = y(x + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dejansko:

$$u'(x) = -y'(-x) = -e^{y(-x)} \sin(-x) = e^{u(x)} \sin x$$

$$(v_k)'(x) = y'(x + 2k\pi) = e^{y(x+2k\pi)} \sin(x + 2k\pi) = e^{v_k(x)} \sin x.$$

Z ločitvijo spremenljivk ter integracijo dobimo

$$-e^{-y} = \int e^{-y} dy = \int \sin x dx = -\cos x - c,$$

$$y(x, c) = -\log(\cos x + c), \quad \cos x + c > 0.$$

Obnašanje rešitev je bistveno odvisno od vrednosti konstante $c \in \mathbb{R}$:

- $c > 1$: rešitev obstaja za vsak $x \in \mathbb{R}$;
- $-1 < c \leq 1$: rešitve obstajajo na končnih intervalih, kjer je $\cos x + c > 0$, ter imajo logaritemske singularnosti $(+\infty)$ v krajiščih;
- $c \leq -1$: ni rešitev.

Uvedba nove spremenljivke

Pogosto lahko diferencialni enačbo poenostavimo z zamenjavo koordinat in jo tako privedemo v enega od že obravnavanih tipov.

Kot primer si oglejmo enačbo

$$y' = f(ax + by + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Predpostavimo da je $b \neq 0$, sicer lahko enačbo rešimo z integracijo. Uvedemo novo odvisno spremenljivko

$$u = ax + by + c, \quad u' = a + by'.$$

Torej u zadošča enačbi

$$u' = a + by' = a + bf(u) = g(u).$$

To je enačba že znanega tipa.

Homogena diferencialna enačba. Oglejmo si enačbo

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

pri kateri je desna stran odvisna le od kvocienta y/x .

Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = y/x$ oziroma $y = xu$. Odvajamo in vstavimo v enačbo:

$$y' = (xu)' = u + xu' = f(u), \quad u' = \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}.$$

To je enačba z ločljivima spremenljivkama:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \log x.$$

Primer homogene enačbe. Rešimo začetni problem

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}, \quad y(1) = 1.$$

Uvedemo spremenljivko $u = \frac{y}{x}$ in dobimo

$$y' = (xu)' = xu' + u = u - \frac{1}{u^2}, \quad u^2 u' = -\frac{1}{x}.$$

Z integracijo dobimo

$$\frac{u^3}{3} = -\log x + c.$$

Začetni pogoj $y(1) = 1$ se spremeni v $u(1) = \frac{y(1)}{1} = 1$, odkoder sledi $c = 1/3$ in

$$u(x) = \sqrt[3]{1 - 3 \log x}, \quad y(x) = x \sqrt[3]{1 - 3 \log x}.$$

Splošnejša homogena enačba.

Oglejmo si enačbo oblike

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right).$$

Če je $\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = a\beta - b\alpha = 0$, se enačba po krajšanju znotraj f spremeni v eno od že znanih oblik. V primeru, kot determinanta ni enaka 0, pa ima sistem linearnih enačb

$$ax + by + c = 0, \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

natanko eno rešitev (x_0, y_0) . Z uvedbo novih spremenljivk

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0$$

se začetna enačba spremeni v homogeno enačbo

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{\alpha X + \beta Y}\right) = f\left(\frac{a + bY/X}{\alpha + \beta Y/X}\right).$$

Uvedemo novo spremenljivko $u = Y/X$ in postopamo kot prej.

Primer

$$y' = \frac{y+1}{x+2} - \exp\left(\frac{y+1}{x+2}\right).$$

Uvedemo nove spremenljivke

$$\begin{aligned} X &= x + 2, & Y &= y + 1, & u &= \frac{Y}{X} = \frac{y+1}{x+2}, \\ y &= (x+2)u - 1, & y' &= u + (x+2)u' = u + Xu' = u - e^u, \\ Xu' &= -e^u, & -e^{-u}du &= \frac{dX}{X}, \\ e^{-u} &= \log|X| + c = \log|x+2| + c, & u(x) &= -\log(\log|x+2| + c), \\ y &= -1 + (x+2)u(x) = -1 - (x+2)\log(\log|x+2| + c). \end{aligned}$$

Primer uporabe: modeli rasti

Naj bo $y(t)$ velikost neke populacije pri času t . Če populacija narašča premo sorazmerno s svojo velikostjo, lahko to zapišemo z enačbo

$$\frac{\dot{y}}{y} = c, \quad c = \text{koeficient rasti}.$$

Rešitev te enačbe je podana z eksponentno funkcijo $y(t) = y(0)e^{ct}$.

V realnosti se koeficient c spreminja tako s časom t kot tudi z velikostjo populacije y . Npr., ko je populacija zelo velika, začne primanjkovati naravnih pogojev za nadaljnjo rast, pride lahko do kataklizmičnih pogojev, borznih zlomov, virusnih pandemij, itd. Rast ali upad populacije torej opisuje diferencialna enačba oblike

$$\dot{y} = c(t, y)y.$$

Na primer, če predpostavimo, da populacija ne more preseči neke zgornje meje N in se hitrost rasti upočasnjuje proti 0, ko se $y(t)$ približuje N , lahko obnašanje rasti modeliramo s funkcijo $c(y) = c_0(N - y)^k$ za nek eksponent $k = 1, 2, \dots$ in $c_0 > 0$. Dobljeno diferencialno enačbo

$$\dot{y} = c_0 y (N - y)^k$$

lahko rešimo z metodo separacije spremenljivk.

Logistična enačba (Pierre-François Verhulst, 1804–1849)

Najpreprostejši netrivialen primer zgornje enačbe predstavlja primer $k = 1$:

$$\dot{y} = cy(b - y),$$

kjer sta $c > 0$ in $b > 0$ konstanti. To je t.i. *logistična enačba*, ki jo je za uporabo študija populacijskih modelov predlagal P.-F. Verhulst leta 1838.

Z ločitvijo spremenljivk in integracijo pridemo do družine rešitev

$$y(t, a) = \frac{b}{1 + ae^{-bct}}, \quad a \neq 0.$$

Vrednost parametra a določimo iz začetnega pogoja $y(t_0) = y_0$. Npr.,

$$y(0) = b/(1 + a) = y_0 \iff a = b/y_0 - 1.$$

Lahko je videti, da vse rešitve naraščajo proti zgornji meji b , ko $t \rightarrow +\infty$.

Vsebina 3. predavanja

V tem predavanju nadaljujemo s spoznavanjem posebnih živalskih vrst diferencialnih enačb prvega reda in trikov za njihovo reševanje.

- (1) Linearna diferencialna enačba
- (2) Rešitev homogene linearne diferencialne enačbe
- (3) Nehomogena linearna diferencialna enačba
- (4) Izrek o obstoju rešitev linearne enačbe, primeri
- (5) Bernoullijeva enačba
- (6) Ricattijeva enačba
- (7) Splošna logistična enačba

Linearna diferencialna enačba

(Navadna) *linearna diferencialna enačba prvega reda* je oblike

$$y' + a(x)y = b(x),$$

kjer sta $a(x)$ in $b(x)$ dani funkciji na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Operator L , ki vsaki odvedljivi funkciji $y(x)$ na I priredi funkcijo

$$(Ly)(x) = y'(x) + a(x)y(x),$$

se imenuje *linearni diferencialni operator*. Z njegovo pomočjo lahko enačbo zapišemo v preprosti obliki

$$Ly = 0 \text{ (homogena enačba),} \quad Ly = b \text{ (nehomogena enačba).}$$

Operator je linearen v smislu, da za poljubni odvedljivi funkciji $\phi(x)$, $\psi(x)$ na I in konstanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$L(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha L\phi + \beta L\psi.$$

Odtod sledi, da je vsaka linearna kombinacija rešitev homogene enačbe $Ly = 0$ spet rešitev te enačbe.

Rešitev homogene linearne diferencialne enačbe

$$y' + a(x)y = 0, \quad d \log |y| = \frac{dy}{y} = -a(x)dx.$$

Z integracijo dobimo

$$\log |y| = - \int a(x)dx + c,$$

$$y(x) = y(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}$$

Izrek. Naj bo $a(x)$ zvezna funkcija na intervalu $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$. Tedaj ima za vsak par števil $x_0 \in (\alpha, \omega)$ in $y_0 \in \mathbb{R}$ začetni problem

$$y' + a(x)y = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

natanko eno rešitev na intervalu $x \in (\alpha, \omega)$, ki je podana z zgornjo formulo. Množica rešitev je enorazsežen vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$, katerega baza je funkcija $e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}$, $x \in I$.

Nehomogena linearne diferencialne enačbe.

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I.$$

Fiksirajmo neko začetno točko $x_0 \in I$. Rešitev iščemo z nastavkom

$$y(x) = C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = C(x)e^{-G(x)}, \quad G(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt,$$

kjer je $C(x)$ iskana funkcija. Za konstantno vrednost $C = C_0$ je to ravno rešitev homogene linearne enačbe $y' + a(x)y = 0$. Zato tej metodi pravimo variacija konstante. Upošteva je $G'(x) = a(x)$ dobimo

$$y'(x) = C'(x)e^{-G(x)} - C(x)e^{-G(x)}G'(x) = C'(x)e^{-G(x)} - C(x)e^{-G(x)}a(x).$$

Vstavimo v enačbo:

$$y'(x) + a(x)y(x) = y'(x) + a(x)C(x)e^{-G(x)} = C'(x)e^{-G(x)} = b(x)$$

$$C'(x) = b(x)e^{G(x)}.$$

Rešitev začetnega problema za nehomogeno linearno enačbo.

Odtod dobimo funkcijo $C(x)$ z integracijo:

$$C(x) = \int b(x)e^{G(x)}dx + C_0.$$

Družina rešitev nehomogene enačbe $y' + a(x)y = b(x)$ je torej

$$y(x, C_0) = C_0e^{-G(x)} + e^{-G(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{G(t)}dt,$$

pri čemer je

$$G(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt.$$

Iz $y(x_0, C_0) = C_0$ vidimo, da je rešitev začetnega problema

$$y' + a(x)y = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

funkcija

$$y(x) = e^{-G(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(t) e^{G(t)} dt \right) = y_0 e^{-G(x)} + \int_{x_0}^x b(t) e^{G(t)-G(x)} dt.$$

Izrek o obstoju rešitev linearne enačbe. Dobljeno povzemimo v naslednjem izreku.

Izrek. Naj bosta $a(x)$ in $b(x)$ zvezni funkciji na intervalu $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$. Tedaj ima za vsak par števil $x_0 \in (\alpha, \omega)$ in $y_0 \in \mathbb{R}$ začetni problem

$$y' + a(x)y = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

natanko eno rešitev na intervalu $x \in (\alpha, \omega)$, ki je podana s formulo

$$y(x) = e^{-G(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(t) e^{G(t)} dt \right) = y_0 e^{-G(x)} + \int_{x_0}^x b(t) e^{G(t)-G(x)} dt,$$

kjer je

$$G(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Splošna rešitev linearne enačbe

Dobljena formula pokaže naslednje, kjer je $Ly = y' + a(x)y$.

Trditev. Splošna rešitev nehomogene linearne enačbe $Ly = b$ je enaka vsoti

$$y = y_h + y_p$$

splošne rešitve prirejene linearne enačbe $Ly_h = 0$, to je $y_h(x) = C e^{-\int_{x_0}^x a(t) dt}$ za $C \in \mathbb{R}$, in neke (poljubne) partikularne rešitve y_p nehomogene enačbe.

To vidimo tudi direktno. Naj bosta y_p in y poljubni rešitvi nehomogene enačbe:

$$Ly_p = b, \quad Ly = b,$$

Z upoštevanjem linearnosti operatorja L vidimo, da je

$$Ly - Ly_p = L(y - y_p) = 0,$$

torej je razlika $y_h := y - y_p$ rešitev homogene enačbe $Ly_h = 0$.

Odtod sledi, da je splošna (poljubna) rešitev y oblike $y = y_h + y_p$ kot v trditvi.

Primer rešitve nehomogene linearne enačbe

Poiskali bomo splošno rešitev nehomogene linearne enačbe

$$y' + xy = x^3.$$

Sledimo postopku brez uporabe dobljenih formul.

Najprej rešimo prirejeno homogeno enačbo $y' + xy = 0$ z ločitvijo spremenljivk:

$$\frac{dy}{y} = -x dx, \quad \log |y| = -x^2/2 + c.$$

Torej je splošna rešitev homogene enačbe enaka

$$y(x) = C e^{-x^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sedaj iščemo rešitev nehomogene enačbe z nastavkom

$$y(x) = C(x)e^{-x^2/2}$$

$$y'(x) = C'(x)e^{-x^2/2} + C(x)e^{-x^2/2}(-x) = C'(x)e^{-x^2/2} - y(x)x.$$

Vstavimo v osnovno enačbo in dobimo

$$y'(x) + xy(x) = C'(x)e^{-x^2/2} = x^3.$$

Nadaljevanje in zaključek primera Torej je

$$C'(x) = x^3 e^{x^2/2}, \quad C(x) = \int x^3 e^{x^2/2} dx.$$

V integral uvedemo novo spremenljivko $u = x^2/2$, $du = xdx$. Tedaj je

$$x^3 e^{x^2/2} dx = x^2 e^{x^2/2} (xdx) = 2ue^u du.$$

Z integracijo per partes dobimo

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2/2} dx &= \int 2ue^u du = 2 \int u d(e^u) \\ &= 2ue^u - 2 \int e^u du = (2u - 2)e^u + C \\ &= (x^2 - 2)e^{x^2/2} + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev nehomogene enačbe je torej

$$y(x) = \left((x^2 - 2)e^{x^2/2} + C \right) e^{-x^2/2} = x^2 - 2 + Ce^{-x^2/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Bernoullijeva enačba (Jacob Bernoulli, 1654–1705).

Bernoullijeva enačba je oblike

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1.$$

To je nelinearna diferencialna enačba, ker v njej funkcija y nastopa nelinearno. Natančneje, enačba je *kvazilinearna*, ker je linearna v odvodu y' , ne pa tudi v funkciji y .

To enačbo lahko transformiramo v linearno diferencialno enačbo na naslednji način. Predpostavimo, da sta funkciji a in b zvezni na nekem intervalu $I \subset \mathbb{R}$ in je na tem intervalu iskana rešitev $y > 0$. Enačbo pomnožimo z $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$:

$$(1 - \alpha)y^{-\alpha}y' + (1 - \alpha)a(x)y^{1-\alpha} + (1 - \alpha)b(x) = 0.$$

Če uporabimo identiteto

$$(y^{1-\alpha})' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y',$$

dobimo

$$(y^{1-\alpha})' + (1 - \alpha)a(x)y^{1-\alpha} + (1 - \alpha)b(x) = 0.$$

To je linearna diferencialna enačba v spremenljivki $z = y^{1-\alpha}$.

Primer Bernoullijeve enačbe. Enačba

$$y' + 2xy + b(x)y^2 = 0.$$

je Bernoullijeva enačba z $\alpha = 2$. Delimo z y^2 :

$$y^{-2}y' + 2xy^{-1} + b(x) = 0.$$

V spremenljivki $z = y^{-1}$ je

$$z' = -y^{-2}y'$$

in enačba dobi obliko

$$z' = 2xz + b(x).$$

To je nehomogena linearna enačba v z in njena splošna rešitev je

$$z(x) = e^{x^2} \left(c + \int_{x_0}^x e^{-t^2} b(t) dt \right).$$

Ricattijeva enačba (Jacopo Francesco Ricatti, 1676–1754)

Kvazilinearna diferencialna enačba oblike

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

se imenuje Ricattijeva enačba. Enačba je kvadratna v funkciji y in nehomogena. Če je $c \equiv 0$, je enačba Bernoullijeva z $\alpha = 2$.

Razen v posebnih primerih Ricattijeva enačba ni eksplicitno rešljiva. Če pa slučajno poznamo eno njeno rešitev, lahko najdemo vse preostale rešitve z redukcijo na Bernoullijevo enačbo, kot sledi.

Denimo, da je ϕ neka rešitev, torej velja

$$\phi'(x) = a(x)\phi(x)^2 + b(x)\phi(x) + c(x).$$

Če odštejemo to enačbo od prvotne enačbe za y , dobimo

$$y' - \phi' = a(x)(y - \phi(x))(y + \phi(x)) + b(x)(y - \phi(x)).$$

Razlika $u = y - \phi$ torej zadošča Bernoullijevi enačbi

$$u' = a(x)u(u + 2\phi(x)) + b(x)u = a(x)u^2 + (2a(x)\phi(x) + b(x))u.$$

Primer Ricattijeve enačbe

$$y' - x^2y + y^2 = 2x.$$

Ena rešitev je $\phi(x) = x^2$. Uvedemo novo funkcijo $u = y - x^2$. Tedaj je $y = u + x^2$, $y' = u' + 2x$. Če vstavimo v enačbo, dobimo

$$u' + 2x - x^2(u + x^2) + (u + x^2)^2 = 2x,$$

$$u' + x^2u + u^2 = 0.$$

To je Bernoullijeva enačba. Če delimo z u^2 in uvedemo funkcijo $z = 1/u$, dobimo

$$u^{-2}u' + x^2u^{-1} + 1 = 0 \iff z' = x^2z + 1.$$

Splošna rešitev te linearne enačbe je

$$z(x) = e^{x^3/3} \left(C + \int_{x_0}^x e^{-t^3/3} dt \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Odtod dobimo splošno rešitev prvotne enačbe:

$$y(x) = x^2 + 1/z(x) = x^2 + e^{-x^3/3} \left(C + \int_{x_0}^x e^{-t^3/3} dt \right)^{-1}.$$

Posebna Ricattijeva enačba

Z uvedbo nove neodvisne spremenljivke lahko Ricattijevo enačbo

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

na poljubnem intervalu, kjer je $a(x) \neq 0$, poenostavimo v obliko

$$y' = y^2 + f(x).$$

(Glej Križanič, str. 40.) Primer, kjer je $f(x) = cx^n$ ($c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$) se imenuje **posebna Ricattijeva enačba**:

$$y' = y^2 + cx^n.$$

Če je $n = 0$, je $y' = y^2 + c$ enačba z ločljivima spremenljivkama.

Enačba je eksplicitno rešljiva z integracijami tudi v primeru $n = -2$ (in še v neskončnem zaporedju drugih eksponentov). Uvedemo spremenljivko

$$z = xy, \quad y = z/x, \quad y' = (xz' - z)/x^2.$$

Vstavimo v enačbo, pomnožimo z x^2 in dobimo

$$xz' - z = z^2 + c, \quad \frac{dz}{z^2 + z + c} = \frac{dx}{x}.$$

Splošna logistična enačba

$$y' = y(b(x) - c(x)y) = b(x)y - c(x)y^2.$$

Primer, ko sta b in c konstanti, smo že obravnavali. V variabilnem primeru enačba predstavlja model rasti, kjer sta lokalna stopnja reprodukcije pri majhnih $y > 0$ in zgornja meja variabilni.

To je primer Bernoullijeve enačbe, ki smo jo že obravnavali. Substitucija $y = 1/u$ vodi do enačbe

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u} \left(b(x) - \frac{c(x)}{u} \right) \\ u' + b(x)u = c(x).$$

To je nehomogena linearna enačba, ki jo znamo rešiti:

$$u(x) = e^{-B(x)} \left(u_0 + \int_{x_0}^x c(t)e^{B(t)} dt \right), \quad B(x) = \int_{x_0}^x b(t) dt, \\ y(x) = e^{B(x)} \left(y_0^{-1} + \int_{x_0}^x c(t)e^{B(t)} dt \right)^{-1}.$$

Vsebina 4. predavanja.

V tem predavanju bomo spoznali pojem prvega integrala diferencialne enačbe ter si ogledali parametričen pristop k reševanju enačb.

- (1) Prvi integrali diferencialne enačbe, primeri
- (2) Gradient prvega integrala je pravokoten na rešitve
- (3) Pfaffova enačba v ravnini
- (4) Iskanje prvega integrala
- (5) Lagrangejev multiplikator
- (6) Parametrično reševanje diferencialnih enačb
- (7) Lagrange-d'Alembertova enačba
- (8) Clairautova enačba

Prvi integrali diferencialne enačbe

V dosedanjih primerih smo opazili, da rešitve diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$, kjer je f zvezno parcialno odvedljiva funkcija na neki domeni $D \subset \mathbb{R}^2$, sestavljajo enoparametrično družino rešitev $y = y(x, C)$ v odvisnosti od konstante C . Grafi $(x, f(x, C))$ teh rešitev so paroma disjunktne krivulje v D .

V naslednjem poglavju bomo videli, da lokalno to vselej velja in je posledica izreka o obstoju in enoličnosti rešitev začetnega problema. Globalno to ne velja nujno: množice vseh rešitev v splošnem ni mogoče bijektivno parametrizirati z nekim intervalom v $\mathbb{R}$.

Pogosto lahko (vsaj lokalno) iz enačbe $y = y(x, C)$ izrazimo C in dobimo

$$C = u(x, y).$$

Funkcija u ima torej konstantno vrednost vzdolž grafa $(x, y(x))$ vsake rešitve dane diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$.

Vsaka funkcija s s to lastnostjo se imenuje *prvi integral* ali **primitivna funkcija** diferencialne enačbe.

Primeri prvih integralov

Primer. Enačba $y' = f(x)$ ima rešitve $y = y(x, C) = h(x) + C$, kjer je $h' = f$, in je

$$C = y - h(x) = u(x, y)$$

njen prvi integral.

Primer. Linearna enačba $y' + a(x)y = 0$ ima družino rešitev

$$y = y(x, C) = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}.$$

Njen prvi integral je torej

$$C = u(x, y) = ye^{\int_{x_0}^x a(t)dt}.$$

Diskusija

Prvi integral seveda ni enolično določen. Na primer, če je $u(x, y)$ nek prvi integral dane diferencialne enačbe, je tudi funkcija $h(u(x, y))$ njen prvi integral za poljubno funkcijo h , definirano na zalogi vrednosti funkcije u .

V optimalnem primeru je u prvi integral z lastnostjo $u_y(x, y) \neq 0$ na D . Izrek o implicitni funkciji tedaj pove, da je vsaka nivojnica

$$\Gamma_C = \{(x, y) \in D : u(x, y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

unija največ števno mnogo grafov $y = h_j(x)$ nad paroma disjunktne intervale $x \in I_j \subset \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$. Ko se $x \in I_j$ približuje krajišču intervala I_j , se točka $(x, h_j(x))$ približuje robu domene D ali pa gre proti ∞ (to bomo dokazali).

Ker je u prvi integral enačbe $y' = f(x, y)$, ima konstantno vrednost na vsaki rešitvi. Zato so $y(x) = h_j(x)$ ($x \in I_j$) ravno rešitve te enačbe, na katerih ima u vrednost C . Ko se C spreminja, se tudi število teh intervalov (in s tem število rešitev) lahko spreminja, kar smo že opazili na primerih v 1. predavanju.

Prvi integral s to lastnostjo se imenuje *primitiven prvi integral*. Obstoj takega integrala torej prevede problem reševanja diferencialne enačbe v načeloma preprostejši problem reševanja algebrske enačbe.

Gradient prvega integrala je pravokoten na rešitve

Če je funkcija $u(x, y)$ konstantna vzdolž neke krivulje $y = y(x)$, dobimo z odvajanjem enačbe $u(x, y(x)) = c$ identiteto

$$u_x(x, y(x)) + u_y(x, y(x))y'(x) = 0.$$

Torej je $y(x)$ rešitev diferencialne enačbe

$$u_x(x, y) + u_y(x, y)y' = 0 \iff u_x(x, y)dx + u_y(x, y)dy = 0.$$

Spomnimo se, da je $\nabla u = (u_x, u_y)$ vektorsko polje na $D \subset \mathbb{R}^2$, ki se imenuje *gradient* skalarne funkcije $u(x, y)$.

Zgornja enačba pomeni, da je gradient ∇u prvega integrala v vsaki točki pravokoten na smerni vektor krivulje $x \mapsto (x, y(x))$, to je vektor $(1, y'(x))$.

To idejo lahko splošimo z uporabo vektorskih polj.

Pfaffova enačba v ravnini

Označimo z $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ in $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ standardno bazo ravnine $\mathbb{R}^2$. Vsako vektorsko polje

$$\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y)) = P\mathbf{e}_1 + Q\mathbf{e}_2$$

na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ določa *Pfaffovo diferencialno enačbo*

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \iff P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Tu je $\mathbf{r} = (x, y)$ in $d\mathbf{r} = (dx, dy)$. Rešitve te enačbe na množici $\mathbf{F} \neq 0$ so krivulje, ki so v vsaki točki pravokotne na vektorsko polje $\mathbf{F}$.

Točka (x_0, y_0) se imenuje *regularna točka* enačbe, če je $\mathbf{F}(x_0, y_0) \neq 0$, in *singularna točka*, če je $\mathbf{F}(x_0, y_0) = 0$.

Obnašanje rešitev v okolici singularnih točk je lahko zelo zapleteno, medtem ko v okolici regularne točke (x_0, y_0) lahko enačbo izrazimo v eni od oblik

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad \text{ali} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

odvisno od tega, katera od obeh komponent P, Q vektorskega polja $\mathbf{F}$ je v točki (x_0, y_0) različna od nič.

Iskanje prvega integrala

Vsako diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$ lahko zapišemo v obliki

$$-f(x, y)dx + dy = 0.$$

To je Pfaffova enačba s pripadajočim vektorskim poljem $\mathbf{F} = (-f(x, y), 1)$.

Zanima nas, kako bi za dano enačbo

$$Pdx + Qdy = 0$$

našli netrivialen prvi integral.

Najpreprostejši primer je, ko je vektorsko polje $\mathbf{F} = (P, Q)$ potencialno, torej $\mathbf{F} = \nabla u$, saj je tedaj

$$0 = Pdx + Qdy = u_x dx + u_y dy = du$$

in je u prvi integral enačbe. Na vsaki enostavno povezani domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ je polje $\mathbf{F} = (P, Q)$ potencialno natanko tedaj, ko je

$$P_y = Q_x.$$

V tem primeru najdemo potencial u polja $\mathbf{F}$ z integracijo (predmet Analiza 2).

Integracija na pravokotniku $D \subset \mathbb{R}^2$

Izberemo točko $(x_0, y_0) \in D$. Diferencialno 1-formo $\alpha = Pdx + Qdy$ integriramo od (x_0, y_0) do variabilne točke $(x, y) \in D$ tako, da najprej integriramo po daljici v x smeri, nato pa še v y smeri:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, s)ds.$$

Za fiksen x je očitno

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Isto funkcijo lahko zapišemo tudi v obliki

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, s)ds + \int_{x_0}^x P(t, y)dt.$$

Razlika obeh integralov je namreč integral forme α po robu pravokotnika A s krajišči (x_0, y_0) , (x, y_0) , (x, y) , (x_0, y) kar je po Greenovi formuli enako integralu $\int_A (Q_x - P_y)dxdy = 0$. Z odvajanjem zadnje formule po x dobimo

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Torej je $\nabla u = \mathbf{F}$.

Lagrangejev multiplikator

To je seveda zelo izjemna situacija.

V splošnem lahko poskušamo najti prvi integral tako, da enačbo pomnožimo z nekim primerno izbranim faktorjem $\mu(x, y) > 0$:

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0.$$

To seveda ne spremeni množice rešitev enačbe. Novo vektorsko polje $\mu \mathbf{F} = (\mu P, \mu Q)$ je lokalno potenciano, če izpolnjuje pogoj

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x$$

oziroma

$$Q\mu_x - P\mu_y = \mu(P_y - Q_x).$$

To je parcialna diferencialna enačba prvega reda za funkcijo μ , katere reševanje je načeloma težja naloga od reševanja navadnih diferencialnih enačb. Ta metoda zato v praksi ni zelo uporabna. Včasih pa nam uspe najti rešitev na preprost način (glej primere v Križanič, str. 47–48).

Nekaj primerov multiplikatorjev

Primer 1.

$$y dx - x dy = 0, \quad \mu(x, y) = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

Primer 2.

$$y dx - x dy = 0, \quad \mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \frac{y dx - x dy}{y^2(1 + (x/y)^2)} = \frac{d(x/y)}{1 + (x/y)^2} = d \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Primer 3.

$$2 \sin y dx + x \cos y dy = 0, \quad \mu = x,$$

$$2x \sin y dx + x^2 \cos y dy = d(x^2 \sin y).$$

Parametrično reševanje diferencialnih enačb

Rešiti želimo implicitno podano enačbo

$$F(x, y, y') = 0.$$

Pogosto lahko problem poenostavimo tako, da izrazimo vse tri spremenljivke x, y, y' kot funkcije dveh parametrov u, v :

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

Odtod sledi

$$dx = \phi_u du + \phi_v dv, \quad dy = \psi_u du + \psi_v dv.$$

Te izraze vstavimo v identiteto $dy = y' dx$ in dobimo

$$\psi_u du + \psi_v dv = \chi(u, v)(\phi_u du + \phi_v dv)$$

$$(\psi_u - \chi \phi_u) du + (\psi_v - \chi \phi_v) dv = 0.$$

To je diferencialna enačba za $v = v(u)$ (ali $u = u(v)$), kakršne smo ravnokar obravnavali. Če je $v(u, C)$ njena splošna rešitev, potem je

$$x = \phi(u, v(u, C)), \quad y = \psi(u, v(u, C))$$

parametrično izražena rešitev prvotne enačbe.

Primer parametričnega reševanja

Oglejmo si enačbo

$$y = x \left(y' + \sqrt{1 + y'^2} \right).$$

Če jo izrazimo s pomočjo spremenljivk x in $p = y'$, imamo zvezi

$$y = x \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) \quad \text{in} \quad dy = p dx.$$

Izrazimo dy iz leve enačbe in vstavimo v desno:

$$\begin{aligned} dy &= \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) dx + x \left(1 + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) dp = p dx \\ \sqrt{1 + p^2} dx + x \left(1 + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) dp &= 0. \end{aligned}$$

Zaključek primera

To je enačba z ločljivima spremenljivkama:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p dp}{1 + p^2} = 0$$

Z integracijo dobimo

$$\log |x| + \log \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) + \log \sqrt{1 + p^2} = c$$

$$x \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) \sqrt{1 + p^2} = C = \pm e^c$$

$$y = x \left(p + \sqrt{1 + p^2} \right) \implies y \sqrt{1 + p^2} = C.$$

To je družina rešitev $x = x(p, C)$, $y = y(p, C)$ v odvisnosti od parametra p .

Z eliminacijo parametra p iz zgornjih dveh enačb sledi zveza (preveri!)

$$x^2 + y^2 - 2Cx = 0 \iff (x - C)^2 + y^2 = C^2.$$

To je družina krogov s središči $(C, 0)$ in polmeri $|C|$.

Lagrange-d'Alembertova enačba

Giuseppe Ludovico Lagrangia, 1736; † Joseph-Louis de Lagrange, 1813;

Jean Le Rond d'Alembert, 1717–1783

$$y = x\phi(y') + \psi(y').$$

Prejšnji primer je enačba te vrste. Za parametra izberemo x in $p = y'$. Tedaj

$$y = x\phi(p) + \psi(p), \quad dy = y' dx = p dx.$$

Odtod:

$$\begin{aligned} p dx &= dy = \phi(p) dx + x\phi'(p) dp + \psi'(p) dp, \\ (\phi(p) - p) dx + (x\phi'(p) + \psi'(p)) dp &= 0. \end{aligned}$$

Kjer je $\phi(p) - p \neq 0$, je to linearna diferencialna enačba za $x = x(p, C)$ v odvisnosti od p . Rešitev vstavimo v osnovno enačbo

$$y(p, C) = x(p, C)\phi(p) + \psi(p)$$

in dobimo parametrično izraženo splošno rešitev Lagrangeve enačbe.

Za vsako rešitev $p_0 \in \mathbb{R}$ enačbe $\phi(p) - p = 0$ dobimo še rešitev

$$y = p_0x + \psi(p_0), \quad y' = p_0.$$

Clairautova enačba (Alexis Claude Clairaut, 1713–1765)

Clairautova enačba

$$y = xy' + \psi(y')$$

je poseben primer Lagrangejeve enačbe, pri kateri je $\phi(y') \equiv y'$.

Postopamo enako kot prej in dobimo razcepno enačbo

$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$

Če je $dp = 0$, je p konstanta in $y = px + \psi(p)$; to je ena družina rešitev.

Drugo rešitev dobimo iz

$$x + \psi'(p) = 0.$$

To je nediferencialna enačba za $p = p(x)$. Rešitev obstaja lokalno v okolici vsake točke p_0 , kjer je $\psi''(p_0) \neq 0$. Ker velja tudi $y = px + \psi(p)$, dobimo s tem še eno rešitev $y(x) = p(x)x + \psi(p(x))$ Clairautove enačbe.

Primer $\psi''(p) \equiv 0$ implicira $\psi'(p) = \text{konstanta}$, torej je x konstanta. Zato ta primer ne da nobene dodatne rešitve.

Primer Clairautove enačbe

$$y = xy' + y'^2.$$

Naj bo $p = y'$, torej je $y = xp + p^2$. Upoštevaje $dy = p dx$ dobimo enačbo

$$p dx = dy = d(xp + p^2) = p dx + x dp + 2p dp,$$

$$(x + 2p)dp = 0$$

s splošno rešitvijo $dp = 0$, $p = C \in \mathbb{R}$,

$$y = Cx + C^2.$$

Enačba $x + 2p = 0$, $p = -x/2$ prispeva še rešitev

$$y = xp + p^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}.$$

Vsebina 5. predavanja

V tem predavanju si bomo ogledali pojem vektorskega polja in prirejenega sistema diferencialnih enačb, osnovne lastnosti toka vektorskega polja (dokazi kasneje) ter nekaj elementarnih primerov.

- 26

Iz povedanega sledi, da zadošča obravnavati avtonomne sisteme

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Vsaka rešitev $\mathbf{x}(t)$ se imenuje *tokovnica* ali *integralna krivulja* sistema. V času t je hitrostni vektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ enak vrednosti $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ vektorskega polja $\mathbf{F}$ v točki $\mathbf{x}(t)$. Če predstavlja $\mathbf{F}$ hitrostno polje gibanja tekočine, potem vsaka tokovnica opisuje gibanje nekega konkretnega delca v tem polju.

Tir tokovnice na njenem maksimalnem časovnem intervalu je *trajektorija* sistema. Trajektorije so paroma disjunktne in sestavljajo *fazni portret* sistema.

Točka $\mathbf{x}_0$, v kateri je $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = 0$, se imenuje *stacionarna točka* polja $\mathbf{F}$. Prirejena tokovnica je konstanta: $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$.

Primer: Enačba $\dot{x} = f(t, x)$ je ekvivalentna sistemu

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = f(t, x).$$

Primer: Pfaffovo enačbo $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$ lahko obravnavamo kot sistem

$$\dot{x} = -b(x, y), \quad \dot{y} = a(x, y).$$

Tok vektorskega polja

Naj bo $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ v faznem prostoru. V naslednjem poglavju bomo pokazali, da ima vsak začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad (t_0, \mathbf{x}_0) \in D$$

natanko eno rešitev

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \phi_{t, t_0}(\mathbf{x}_0)$$

na nekem največjem intervalu

$$I_{t_0, \mathbf{x}_0} = (\alpha(t_0, \mathbf{x}_0), \omega(t_0, \mathbf{x}_0)) \subset \mathbb{R},$$

kjer je

$$-\infty \leq \alpha(t_0, \mathbf{x}_0) < t_0 < \omega(t_0, \mathbf{x}_0) \leq +\infty.$$

$I_{t_0, \mathbf{x}_0}$ se imenuje *interval obstoja rešitve* danega začetnega problema. Pot

$$I_{t_0, \mathbf{x}_0} \ni t \mapsto \phi_{t, t_0}(\mathbf{x}_0) \in D$$

je tokovnica danega dinamičnega sistema (oz. vektorskega polja), ki se pri času $t = t_0$ nahaja v točki $\mathbf{x}_0$.

Lastnosti toka

Preslikava $(t, \mathbf{x}_0) \mapsto \phi_{t, t_0}(\mathbf{x}_0)$ se imenuje *tok vektorskega polja* $\mathbf{F}$, ki je inicializiran (umerjen) v času t_0 . Začetni položaj $\mathbf{x}_0$ pri času t_0 se preslika v končni položaj $\phi_{t, t_0}(\mathbf{x}_0)$ pri času t . Množica

$$\Omega_{t_0} = \{(t, \mathbf{x}) \in D : t \in I_{t_0, \mathbf{x}}\} = \bigcup_{\mathbf{x}} I_{t_0, \mathbf{x}} \times \{\mathbf{x}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

se imenuje *fundamentalna domena* toka; to je maksimalna domena preslikave $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi_{t, t_0}(\mathbf{x})$.

Tok ima naslednje bistvene lastnosti:

(1)

$$\phi_{t,t} = \text{Id}, \quad \phi_{t,s} \circ \phi_{s,t_0} = \phi_{t,t_0}.$$

(2) Za vsak fiksen t je preslikava

$$\phi_{t,t_0} : \{\mathbf{x} : (t, \mathbf{x}) \in \Omega_{t_0}\} \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$$

difeomorfizem na svojo sliko in velja

$$\phi_{t,t_0}^{-1} = \phi_{t_0,t}.$$

Tok avtonomnega vektorskega polja

V primeru avtonomnega vektorskega polja $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ označimo s

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \phi_{t,0}(\mathbf{x})$$

tok polja, ki je inicializiran v času $t_0 = 0$. To pomeni, da je

$$\frac{d}{dt}\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\phi_t(\mathbf{x})), \quad \phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Za fiksen s je očitno $t \mapsto \phi_{t+s}(\mathbf{x})$ tokovnica, ki je v času $t = 0$ v točki $\phi_s(\mathbf{x})$. Ker je tudi $t \mapsto \phi_t(\phi_s(\mathbf{x}))$ tokovnica z isto začetno točko $\phi_s(\mathbf{x})$ pri $t = 0$, iz enoličnosti sledi

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \quad \phi_0 = \text{Id}_D, \quad \phi_{-t} = \phi_t^{-1}$$

na maksimalnih domenah danih preslikav. Odtod sledi

$$\phi_{t,t_0} = \phi_t \circ \phi_{t_0}^{-1}.$$

Družina $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ s temi lastnostmi se imenuje *lokalna 1-parametrična grupa difeomorfizmov* na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Beseda *lokalna* se nanaša na dejstvo, da je domena posamezne preslikave ϕ_t lahko prava poddomena v D .

Preslikava $\mathbf{x} \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ se imenuje *premik za čas t* .

Infinitezimalni generator, kompletna vektorska polja

Obratno: Če je $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ lokalna 1-parametrična grupa difeomorfizmov na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in definiramo (avtonomno) vektorsko polje $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt}\phi_t(\mathbf{x}) \right|_{t=0}, \quad \mathbf{x} \in D,$$

potem je $\phi_t(\mathbf{x})$ ravno tok polja $\mathbf{F}$. To vidimo z odvajanjem identitete $\phi_{t+s}(\mathbf{x}) = \phi_t(\phi_s(\mathbf{x}))$ po t pri $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt}\phi_t(\mathbf{x}) \right|_{t=s} = \left. \frac{d}{dt}\phi_{t+s}(\mathbf{x}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}\phi_t(\phi_s(\mathbf{x})) \right|_{t=0} = \mathbf{F}(\phi_s(\mathbf{x})).$$

To vektorsko polje $\mathbf{F}$ se imenuje *infinitezimalni generator grupe $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$* .

Vektorsko polje $\mathbf{F}$ na $D \subset \mathbb{R}^n$ se imenuje *kompletno*, če za vsako točko $\mathbf{x} \in D$ tok $t \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ obstaja za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Z drugo besedo, polje $\mathbf{F}$ je kompletno, če (in samo če) je fundamentalna domena toka enaka $\Omega = \mathbb{R} \times D$.

V tem primeru je družina $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ enoparametrična grupa avtomorfizmov domene D . (Avtomorfizem je difeomorfizem D na D .)

Primer nekompletnega polja na premici

Vektorsko polje

$$\mathbf{F}(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

določa diferencialno enačbo

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0.$$

Rešitev (smo že izračunali) je

$$x(t) = \phi_t(x_0) = \frac{x_0}{1 - t x_0}.$$

Maksimalni interval obstoja rešitve je

$$I_{x_0} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{če je } x_0 = 0; \\ (-\infty, 1/x_0), & \text{če je } x_0 > 0; \\ (1/x_0, +\infty), & \text{če je } x_0 < 0. \end{cases}$$

Vektorsko polje $\mathbf{F}(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$ torej ni kompletno; edina kompletna tokovnica je tista skozi $0 \in \mathbb{R}$.

Primer: kroženje okrog izhodišča v $\mathbb{R}^2$

Primer 1. Oglejmo si naslednje linearno vektorsko polje na $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x).$$

Prirejeni sistem diferencialnih enačb je

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x.$$

Če pomnožimo prvo enačbo z $x dt$ in drugo z $y dt$ ter seštejemo, dobimo

$$x dx + y dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = 0.$$

Funkcija $x^2 + y^2$ je torej prvi integral sistema in trajektorije so krožnice s središčem v $(0, 0)$.

Rešitve začetnega sistema dveh enačb dobimo s primerno parametrizacijo krožnic:

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t,$$

Vektorsko polje $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ na $\mathbb{R}^2$ je torej kompletno in njegov tok je

$$\phi_t(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Posplošitev: Hamiltonovo vektorsko polje

Naj bo $E(x, y)$ gladka funkcija na $\mathbb{R}^2$. Vektorsko polje

$$\mathbf{H}_E = \left(-\frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial x} \right) = (-E_y, E_x)$$

se imenuje *Hamiltonovo polje* z energijsko funkcijo E in

$$\dot{x} = -E_y, \quad \dot{y} = E_x$$

je prirejeni *Hamiltonov sistem*. Za vsako tokovnico $(x(t), y(t))$ je

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = E_x \dot{x} + E_y \dot{y} = E_x (-E_y) + E_y E_x = 0,$$

torej je E prvi integral sistema. Trajektorija skozi (x_0, y_0) leži v nivojnici $E = E(x_0, y_0) = c$. Če je c nekritična vrednost E , je trajektorija povezana komponenta nivojnice $E = c$, ki vsebuje (x_0, y_0) . Vsaka kritična točka funkcije E je stacionarna točka polja $\mathbf{H}_E$. Če je E funkcija izčrpanja na $\mathbb{R}^2$, kar pomeni

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} |E(x, y)| = +\infty,$$

potem so njene nivojnice kompaktne in Hamiltonovo polje $\mathbf{H}_E$ je kompletno.

Primer: sedelna (hiperbolična) točka

Kot drugi primer si oglejmo tok naslednjega vektorskega polja na $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}(x, y) = (x, -y).$$

Prirejen sistem

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$$

sestoji iz dveh neodvisnih enačb in lahko integriramo vsako posebej:

$$x(t) = x_0 e^t, \quad y(t) = y_0 e^{-t}.$$

Polje je kompletno, prvi integral je $xy = C$, sistem je Hamiltonov, tok je $\phi_t(x, y) = (xe^t, ye^{-t})$, in trajektorija skozi (x_0, y_0) je

- ustrezna veja hiperbole $xy = x_0 y_0$, če je $x_0 y_0 \neq 0$;
- poltrak $\pm x > 0, y = 0$, če je $\pm x_0 > 0$ in $y_0 = 0$, pri čemer gre tok proti $(\pm\infty, 0)$ pri $t \rightarrow +\infty$;
- poltrak $x = 0, \pm y > 0$, če je $x_0 = 0$ in $\pm y_0 > 0$, pri čemer gre tok proti $(0, 0)$ pri $t \rightarrow +\infty$;
- točka $(0, 0)$, če je $x_0 = y_0 = 0$.

Drugi primer z istim prvim integralom

Oglejmo si tok naslednjega vektorskega polja na $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y, -xy^2) = xy(x, -y).$$

To polje je proporcionalno prejšnjemu s faktorjem proporcionalnosti xy . Odtod sledi, da ima v bistvu enak fazni portret, toda z drugačno parametrizacijo posameznih integralnih krivulj.

Prirejen sistem enačb je

$$\dot{x} = x^2 y, \quad \dot{y} = -xy^2.$$

Če pomnožimo prvo enačbo z ydt , drugo z xdt ter seštejemo, dobimo

$$ydx + xdy = d(xy) = 0.$$

Funkcija xy je torej prvi integral sistema. Njegove trajektorije so hiperbole $xy = x_0 y_0 \neq 0$ ter točke na obeh koordinatnih oseh.

Nadaljevanje primera

Spomnimo:

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y, -xy^2) = xy(x, -y).$$

Tok polja je enak

$$\phi_t(x, y) = (xe^{txy}, ye^{-txy}) = (a(t, x, y), b(t, x, y)).$$

Preverimo! Najprej opazimo, da velja

$$a(t, x, y)b(t, x, y) = xy$$

in zato

$$\mathbf{F}(\phi_t(x, y)) = xy(a(t, x, y), -b(t, x, y)).$$

Po drugi strani je

$$\dot{\phi}_t(x, y) = (x(xy)e^{txy}, -y(xy)e^{-txy}) = xy(xe^{txy}, -ye^{-txy}).$$

Izraza sta torej enaka.

V primerjavi s tokom polja $(x, -y)$ iz prejšnjega primera vidimo, da je hitrost na tokovnici skozi dano točko (x, y) spremenjena za faktor xy . Ko gre $xy \rightarrow 0$, gre hitrost proti 0 in točke na koordinatnih oseh so stacionarne točke.

Produkt vektorskega polja s prvim integralom

Obravnavani primer lahko posplošimo. Naj bo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ neko avtonomno vektorsko polje, $\phi_t(\mathbf{x})$ njegov tok in $u(\mathbf{x})$ nek prvi integral sistema. Slednje pomeni, da je za vsak $\mathbf{x}$ funkcija

$$t \mapsto u(\phi_t(\mathbf{x})) = u(\mathbf{x})$$

konstantna (neodvisna od t).

V tem primeri je

$$\psi_t(\mathbf{x}) = \phi_{tu(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$$

tok vektorskega polja

$$\tilde{F}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

To polje ima isto smer kot $\mathbf{F}$, velikost pa je pomnožena z $u(\mathbf{x})$. (Kjer je $u(\mathbf{x}) < 0$, je seveda smer vektorja obrnjena).

To vidimo iz verižnega pravila in predpostavke $u(\mathbf{x}) = u(\phi_t(\mathbf{x}))$ za vsak t :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_t(\mathbf{x}) &= \dot{\phi}_{tu(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})\mathbf{F}(\phi_{tu(\mathbf{x})}(\mathbf{x})) = u(\phi_{tu(\mathbf{x})}(\mathbf{x}))\mathbf{F}(\phi_{tu(\mathbf{x})}(\mathbf{x})) \\ &= u(\psi_t(\mathbf{x}))\mathbf{F}(\psi_t(\mathbf{x})) \\ &= \tilde{F}(\psi_t(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Hamiltonova polja na $\mathbb{R}^{2n}$

Hamiltonova vektorska polja obstajajo na vsakem sodo razsežnem evklidskem prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. Označimo koordinate z

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Vsaki gladki funkciji $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ priredimo njen *Hamiltonian*

$$\mathbf{H}_E = (-E_{\mathbf{y}}, E_{\mathbf{x}}) = (-E_{y_1}, \dots, -E_{y_n}, E_{x_1}, \dots, E_{x_n}).$$

Kot prej vidimo, da je E prvi integral prirejenega *Hamiltonovega sistema*

$$\dot{x}_k = -E_{y_k}, \quad \dot{y}_k = E_{x_k}, \quad k = 1, \dots, n$$

in vsaka tokovnica $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ leži v ustrezni nivojni ploskvi $E = c$.

V naravnih fizikalnih primerih funkcija E predstavlja energijo sistema in zadnje omenjeno dejstvo se imenuje zakon o ohranjanju energije.

Izkaže se, da ima pri $n > 1$ za večino funkcij E tok Hamiltonovega polja $\mathbf{H}_E$ kaotično obnašanje na nivojnih hiperploskvah $E = c$. Konkretno, skoraj vsaka tokovnica skoraj vsakega Hamiltonovega polja je povsod gosta v ustrezni povezani komponenti nivojne ploskve.

Primer: Strižna polja

Vektorsko polje na $\mathbb{R}^2$ oblike

$$\mathbf{F}(x, y) = (0, a(x))$$

se imenuje *strig*. Njegov tok je

$$\phi_t(x, y) = (x, y + ta(x)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vektorsko polje oblike

$$\mathbf{F}(x, y) = (0, a(x)y)$$

je *posplošen strig* in njegov tok je

$$\phi_t(x, y) = (x, ye^{ta(x)}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Splošnejši (posplošeni) strig dobimo z istimi formulami v drugih sistemih linearnih koordinat na $\mathbb{R}^2$. Strigi in posplošeni strigi so torej kompletna vektorska polja. Podobno definiramo (posplošene) strige na $\mathbb{R}^n$ za vsak $n > 1$.

Zanimivost: Grupa vseh gladih difeomorfizmov prostora $\mathbb{R}^n$, ki je generirana s strigi in posplošenimi strigi, je gosta v grupi $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ vseh difeomorfizmov v gladki kompaktno-odprti topologiji. To pomeni, da lahko za poljuben $r \in \mathbb{N}$ vsak gladek difeomorfizem $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aproksimiramo v $\mathcal{C}^r$ topologiji na kompaktnih s kompozicijami strigov.

Redukcija enačbe višjega reda na sistem enačb

Navadno diferencialno enačbo n -tega reda

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

lahko prevedemo na sistem n diferencialnih enačb prvega reda tako, da uvedemo spremenljivke

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \ddot{x}, \quad \dots, \quad x_n = x^{(n-1)}.$$

Tedaj je prvotna enačba ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dots &\dots \dots \\ \dot{x}_n &= f(t, x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Ker ima ta sistem natanko eno lokalno rešitev za vsako množico začetnih pogojev $x_j(t_0) = x_j^0$ ($j = 1, \dots, n$), ima enačba n -tega reda natanko eno lokalno rešitev s predpisano vrednostjo in prvimi $n - 1$ odvodi v $t = t_0$.

Primer Enačbo drugega reda

$$\ddot{x} + x = 0; \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2$$

z uvedbo spremenljivke $y = \dot{x}$ prevedemo na sistem

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

Ta sistem smo že rešili in njegova splošna rešitev je

$$x(t) = A \sin t + B \cos t, \quad y(t) = -B \sin t + A \cos t; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Dejansko je $\dot{x} = y$ in

$$\ddot{x}(t) = \dot{y}(t) = -A \sin t - B \cos t = -x(t).$$

Z upoštevanjem danih začetnih pogojev pa dobimo partikularno rešitev

$$x(t) = \cos t + 2 \sin t.$$

II. poglavje: Eksistenčni izreki

V drugem poglavju bomo spoznali izreke o obstoju rešitev navadnih diferencialnih enačb in njihovih lastnostih.

Vsebina 6. predavanja V tem predavanju si bomo ogledali naslednje teme:

- (1) Obstoj rešitev navadne diferencialne enačbe
- (2) Zvezna odvisnost rešitve od začetnega pogoja
- (3) Picardova iteracija
- (4) Ocene napak v Picardovi iteraciji

Kaj bomo pokazali: Naj bo $f(t, x)$ zvezna funkcija na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$, ki zadošča Lipschitzovemu pogoju v spremenljivki x :

$$|f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|$$

za neko konstanto $L \in \mathbb{R}_+$. Dokazali bomo, da ima vsak začetni problem

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in D$$

natanko eno lokalno rešitev

$$x(t) = x(t; t_0, x_0)$$

na nekem intervalu $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subset \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Poleg tega sta rešitev in njen t -odvod zvezno odvisna od začetnega pogoja (t_0, x_0) .

Če je funkcija f gladka razreda $\mathcal{C}^r(D)$ za nek $r \in \mathbb{N}$, je vsaka rešitev $x(t; t_0, x_0)$ razreda $\mathcal{C}^r$ v vseh spremenljivkah. Iz enačbe sledi, da je njen t -odvod

$$\dot{x}(t; t_0, x_0) = f(t, x(t; t_0, x_0))$$

prav tako razreda $\mathcal{C}^r$ v vseh spremenljivkah.

Analogni rezultati veljajo za sisteme navadnih diferencialnih enačb.

Osnovna ideja

Odvedljiva funkcija $x(t)$ na intervalu $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, katere graf leži v dani domeni D , zadošča začetnemu problemu

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

za neko točko $(t_0, x_0) \in D$ natanko tedaj, ko zadošča integralni enačbi

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Desno stran enačbe opazujemo kot operator, ki zvezni funkciji $x(s)$ na $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ priredi zvezno odvedljivo funkcijo

$$(\mathcal{A}x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Če nam uspe pokazati, da je operator $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ skrčitev na nekem polnem metričnem podprostoru E Banachovega prostora $\mathcal{C}([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$ vseh zveznih funkcij na danem

intervalu s supremum metriko, potem po Banachovem izreku obstaja natanko ena negibna točka $x \in E$ operatorja $\mathcal{A}$. Očitno je ta negibna točka rešitev začetnega problema.

Osnovni pravokotnik

Izberimo števili $a > 0$, $b > 0$ tako, da zaprt pravokotnik

$$P = P_{a,b} = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

leži v domeni $D \subset \mathbb{R}^2$. Naše osnovne predpostavke so naslednje:

- f je zvezna na P .
- $|f(t, x)| \leq M$ za vsak $(t, x) \in P$.
- $|f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|$ za vsak par $(t, x) \in P$, $(t, x') \in P$.

Fiksirajmo število α , $0 < \alpha \leq a$, katerega vrednost bomo določili kasneje.

Označimo s $\mathcal{C}(P_{\alpha,b/2})$ Banachov prostor vseh zveznih funkcij $x(t, y)$ na pravokotniku $P_{\alpha,b/2} \subset P_{a,b}$, opremljen s supremum normo

$$\|x\| = \sup\{|x(t, y)| : (t, y) \in P_{\alpha,b/2}\}$$

in prirejeno funkcijo razdalje (metriko) $d(x, x') = \|x - x'\|$.

Iz predmeta Analiza 1 vemo, da je vsako enakomerno Cauchyjevo zaporedje zveznih funkcij enakomerno konvergentno in njegova limita je zvezna funkcija. Odtod sledi, da je prostor $\mathcal{C}(P_{\alpha,b/2})$ s to metriko poln metričen prostor.

Integralni operator

Definirajmo podmnožico

$$E = \{x \in \mathcal{C}(P_{\alpha,b/2}) : x(t_0, y) = y, |x(t, y) - x_0| \leq b \text{ za vsak } (t, y) \in P_{\alpha,b/2}\}.$$

Funkcijo $x = x(t, y) = x_y(t)$ iz množice E si predstavljamo kot družino zveznih funkcij spremenljivke $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, ki je zvezno odvisna od parametra $y \in [x_0 - b/2, x_0 + b/2]$, tako da je izpolnjen začetni pogoj $x(t_0, y) = y$ in da graf funkcije x leži v pravokotniku $P_{\alpha,b} \subset P_{a,b}$.

Očitno je E zaprta podmnožica polnega metričnega prostora $\mathcal{C}(P_{\alpha,b/2})$, zato je E z zgoraj definirano funkcijo razdalje poln metričen prostor.

Oglejmo si operator

$$\mathcal{A} : E \longrightarrow \mathcal{C}(P_{\alpha,b/2}), \quad \mathcal{A}(x)(t, y) = y + \int_{t_0}^t f(s, x(s, y)) ds.$$

Funkcija $\mathcal{A}(x)$ je zvezna na $P_{\alpha,b/2}$, odvedljiva po t in zadošča

$$\frac{\partial \mathcal{A}(x)(t, y)}{\partial t} = f(t, x(t, y)), \quad \mathcal{A}(x)(t_0, y) = y.$$

Operator $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ je skrčitev

Najprej pokažimo, da $\mathcal{A}$ preslika E nazaj v E , če je število $\alpha > 0$ dovolj majhno. V ta namen za poljubno funkcijo $x \in E$ ocenimo supremum razlike med funkcijo $\mathcal{A}(x)$ in

konstanto x_0 na $(t, y) \in P_{\alpha, b/2}$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(x)(t, y) - x_0| &\leq |y - x_0| + \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s, y)) ds \right| \\ &\leq b/2 + M\alpha \\ &\leq b, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali $|f| \leq M$, $|t - t_0| \leq \alpha$, in zadnja neenakost velja, če je

$$\alpha \leq \frac{b}{2M}.$$

Tedaj graf funkcije $\mathcal{A}(x)$ nad intervalom $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ leži v pravokotniku $P_{\alpha/2, b}$ in je zato $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ endomorfizem.

Operator $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ je skrčitev

Sedaj pokažimo, da je $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ skrčitev, če je število $\alpha > 0$ dovolj majhno. Naj bosta $x, \tilde{x} \in E$ poljubna elementa. Spomnimo, da je L Lipschitzova konstanta za f . Ocenimo razliko med funkcijama $\mathcal{A}(x)$ in $\mathcal{A}(\tilde{x})$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(x)(t, y) - \mathcal{A}(\tilde{x})(t, y)| &\leq \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s, y)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}(s, y)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s, y)) - f(s, \tilde{x}(s, y))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L |x(s, y) - \tilde{x}(s, y)| ds \right| \\ &\leq L\alpha \|x - \tilde{x}\| \quad \text{za } |t - t_0| \leq \alpha. \end{aligned}$$

Če izberemo $0 < \alpha < 1/L$, sledi $0 < L\alpha < 1$ in preslikava $\mathcal{A}$ je skrčitev:

$$\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(\tilde{x})\| \leq L\alpha \|x - \tilde{x}\|.$$

Povzetek: Če ob začetnih predpostavkah število α izberemo tako, da je

$$0 < \alpha < \min\{a, b/2M, 1/L\},$$

potem je preslikava $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ skrčitev za faktor $L\alpha < 1$.

Zaključek: Po Banachovem izreku obstaja natanko ena negibna točka $x \in E$ operatorja $\mathcal{A} : E \rightarrow E$. Torej x zadošča enačbi

$$x(t, y) = \mathcal{A}(x)(t, y) = y + \int_{t_0}^t f(s, x(s, y)) ds, \quad (t, y) \in P_{\alpha, b/2}.$$

Če odvajamo po t , dobimo za vsako točko $(t, y) \in P_{\alpha, b/2}$:

$$\dot{x}(t, y) = f(t, x(t, y)), \quad x(t_0, y) = y.$$

To pomeni, da je $x(\cdot, y)$ rešitev zgornjega začetnega problema na intervalu $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, ki je zvezno odvisna od začetnega pogoja $y \in [x_0 - b/2, x_0 + b/2]$. Z manjšo spremembo v dokazu bi lahko ugotovili, da je rešitev zvezno odvisna tudi od začetnega časa t_0 .

Analogen dokaz deluje tudi za sistem diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

kjer je $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ in je $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$ zvezno vektorsko polje na neki domeni v faznem prostoru $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$, ki je Lipschitzovo v spremenljivki $\mathbf{x}$.

Izrek o obstoju lokalnih rešitev navadnih DE

S tem smo dokazali glavni del naslednjega izreka o obstoju in zveznosti lokalnih rešitev sistema navadnih diferencialnih enačb. Zadnji del izreka za primer $F \in \mathcal{C}^r(D, \mathbb{R}^n)$ bomo dokazali v 7. predavanju. Trditve o obstoju realno analitičnih rešitev ne bomo dokazali, ker je dokaz tehnično precej zahteven.

Izrek. Naj bo D domena v $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ in $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ zvezna preslikava, ki je lokalno na D Lipschitzova v prostorski spremenljivki $\mathbf{x}$. Potem za vsako točko $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ obstajata okolica $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U \subset D$ ter število $\alpha > 0$, tako da ima začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{y}, \quad (s, \mathbf{y}) \in U$$

natanko eno rešitev $\mathbf{x}(t; s, \mathbf{y})$ na intervalu $t \in (s - \alpha, s + \alpha)$.

Rešitev $\mathbf{x}(t; s, \mathbf{y})$ je zvezna v vseh spremenljivkah, odvedljiva po t , in njen t -odvod je zvezen v vseh spremenljivkah.

Če je $\mathbf{F}$ gladka razreda $\mathcal{C}^r(D)$ za nek $r \in \mathbb{N}$, potem sta vsaka lokalna rešitev $\mathbf{x}(t; s, \mathbf{y})$ ter njen t -odvod gladki razreda $\mathcal{C}^r$ na svoji domeni.

Če je $\mathbf{F}$ realno analitična, je vsaka rešitev realno analitična.

Sistemi navadnih DE s parametri

Zgornji izrek in njegov dokaz lahko še nekoliko posplošimo.

Pogosto naletimo na diferencialne enačbe ali njihove sisteme, v katerih so poleg začetnega pogoja prisotni dodatni parametri; slednji se pojavijo tudi v rešitvi.

Kot primer si oglejmo si začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{y},$$

kjer je $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ vektor dodatnih parametrov.

Izrek o obstoju in regularnosti rešitev $\mathbf{x}(t; s, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ še vedno velja, s podobnim dokazom, v katerega vgradimo odvisnost od parametra $\mathbf{u}$.

- Če je funkcija $\mathbf{F}$ zvezna v vseh spremenljivkah in Lipschitzova v spremenljivki $\mathbf{x}$, sta rešitev $\mathbf{x}(t; s, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ in njen t -odvod zvezna v vseh spremenljivkah.
- Če je $\mathbf{F}$ gladka razreda $\mathcal{C}^r$ za nek $r \in \mathbb{N}$, sta rešitev in njen t -odvod gladki razreda $\mathcal{C}^r$.
- Če je $\mathbf{F}$ realno analitična, je vsaka rešitev realno analitična.

Picardova iteracija. Spomnimo se, da negibno točko skrčitve $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ najdemo z iteracijo. Začnemo s poljubno $x_0 \in E$ in rekurzivno definiramo

$$x_{k+1} = \mathcal{A}(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vsako tako dobljeno zaporedje funkcij x_k konvergira proti negibni točki $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in E$ preslikave $\mathcal{A}$, torej rešitvi diferencialne enačbe.

Začnemo lahko s konstantno preslikavo $x_0(t) \equiv x_0$ in iteriramo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds \\ &\dots\dots\dots \\ x_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds \end{aligned}$$

Ta postopek se imenuje *Picardova iteracija* (Émil Picard, 1856–1941).

Primer Picardove iteracije

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1.$$

Iteracija:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 1 \\ x_1(t) &= 1 + \int_0^t x_0(s)^2 ds = 1 + t \\ x_2(t) &= 1 + \int_0^t x_1(s)^2 ds = 1 + \int_0^t (1 + s)^2 ds = 1 + t + t^2 + t^3/3 \\ x_3(t) &= 1 + \int_0^t x_2(s)^2 ds = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Rešitev je

$$x(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad -1 < t < 1.$$

Opazimo, da se Taylorjev polinom reda k v točki $t_0 = 0$ približka $x_k(t)$ ujema z ustreznim Taylorjevim polinomom limite $x(t)$. To je splošno dejstvo, ki ga bomo dokazali.

Hitrost konvergence iteratov k rešitvi. Naj bo $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ skrčitev s faktorjem $0 \leq q < 1$ na polnem metričnem prostoru (E, d) , torej je

$$d(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(\tilde{x})) \leq q \cdot d(x, \tilde{x}) \quad \text{za vsak par } x, \tilde{x} \in E.$$

Potem za vsako zaporedje iteratov

$$x_0, \quad x_1 = \mathcal{A}(x_0), \quad x_2 = \mathcal{A}(x_1), \dots$$

in za limito $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ veljajo naslednje ocene za vsak $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+1}) &\leq q^k d(x_0, x_1), \\ d(x, x_k) &\leq \sum_{j=k}^{\infty} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=k}^{\infty} q^j d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1) q^k \sum_{j=0}^{\infty} q^j \\ &= d(x_0, x_1) \frac{q^k}{1-q}. \end{aligned}$$

Ocena napake v Picardovi iteraciji

Uporabimo te ocene v Picardovi iteraciji, kjer za začetni približek x_0 vzamemo konstanto $x_0(t) \equiv x_0$ iz začetnega pogoja $x(t_0) = x_0$. Naslednji približek je

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds, \quad |x_1(t) - x_0| \leq M \cdot |t - t_0|.$$

Tu je $M > 0$ zgornja meja za $|f|$ na osnovnem pravokotniku $P_{a,b}$.

Videli smo, da na vsakem intervalu $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, kjer je

$$0 < \alpha < \min\{a, b/2M, 1/L\},$$

velja

$$|\mathcal{A}(x)(t) - \mathcal{A}(\tilde{x})(t)| \leq \alpha L \|x - \tilde{x}\|.$$

Torej je število $q = \alpha L < 1$ faktor skrčitve preslikave $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ na pravokotniku $P_{\alpha, b/2}$.

Ocena napake v Picardovi iteraciji

Zgoraj smo dobili naslednjo oceno za razdaljo med k -tim približkom x_k in rešitvijo x :

$$d(x, x_k) \leq d(x_0, x_1) \frac{q^k}{1-q}.$$

Pri nas je

$$q = \alpha L \quad \text{in} \quad |x_1(t) - x_0| \leq M \cdot |t - t_0|.$$

Uporabimo to oceno za fiksen t , ki zadošča $|t - t_0| \leq \alpha$ (torej lahko α nadomestimo z $|t - t_0|$ in vzamemo $q = |t - t_0|L$):

$$|x(t) - x_k(t)| \leq M \cdot |t - t_0| \frac{(|t - t_0|L)^k}{1 - |t - t_0|L} = M \frac{|t - t_0|^{k+1} L^k}{1 - L|t - t_0|}.$$

Vidimo, da se funkcija $x(t)$ in njen k -ti približek $x_k(t)$ v Picardovi iteraciji ujemata do reda k v začetni točki $t = t_0$; napaka je reda velikosti

$$|x(t) - x_k(t)| = O(|t - t_0|^{k+1}), \quad |t - t_0| \leq \alpha < 1/L.$$

Izboljšana ocena napake v Picardovi iteraciji

Dobljeno oceno napake lahko bistveno izboljšamo. Začnemo kot prej:

$$x_0(t) = x_0, \quad x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds.$$

Naj bo $x(t)$ rešitev enačbe, torej

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad |t - t_0| \leq \alpha.$$

Naprej pa takole. Naj bo L Lipschitzova konstanta za f in $|f| \leq M$. Tedaj:

$$\begin{aligned} |x(t) - x_0(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right| \leq M|t - t_0|, \\ |x(t) - x_1(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, x_0(s))| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x(s) - x_0(s)| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t M|s - t_0| ds \right| \\ &\leq ML \frac{|t - t_0|^2}{2}. \end{aligned}$$

Izboljšana ocena napake v Picardovi iteraciji

Dobljeno oceno sedaj uporabimo v naslednji oceni:

$$\begin{aligned} |x(t) - x_2(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, x_1(s))| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x(s) - x_1(s)| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t ML \frac{|s - t_0|^2}{2} ds \right| \\ &\leq ML^2 \frac{|t - t_0|^3}{3!}. \end{aligned}$$

Nadaljujemo induktivno in za vsak $k = 1, 2, 3, \dots$ dobimo oceno

$$|x(t) - x_k(t)| \leq ML^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L} \frac{(L|t - t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

To je $(k+1)$ -ti člen v eksponentni vrsti za $\frac{M}{L}e^{L|t-t_0|}$. Ta vrsta konvergira bistveno hitreje kot geometrijska vrsta zaradi faktorja $(k+1)!$ v imenovalcu.

Obstoj rešitev pri šibkejših pogojih

Začetni problem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

ima lokalno v okolici (t_0, x_0) rešitev tudi v primeru, ko je funkcija f samo zvezna (in ni nujno Lipschitzova v spremenljivki x).

Eksistenčno teorija za take sisteme najdemo npr. v prvih dveh poglavjih knjige

P. Hartman, Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, New York, 1964.

Videli pa smo že primere, ko rešitev ni enolična, to je, skozi točko (t_0, x_0) lahko poteka več rešitev enačbe. Konkreten tovrsten primer je enačba

$$\dot{x} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0.$$

Funkcija $x \mapsto \sqrt{|x|}$ v okolici točke $x = 0$ ni Lipschitzova, je pa Hölderjevo zvezna z indeksom $1/2$. V tem primeru nima smisla govoriti o zvezni odvisnosti rešitev od začetnega pogoja.

Vsebina 7. predavanja

V tem predavanju si bomo ogledali naslednje teme.

- (1) Gronwallova lema
- (2) Ocena razdalj med tokovnicami
- (3) Gladka odvisnost rešitev diferencialnih enačb od začetnih pogojev in parametrov
- (4) Taylorjev razvoj toka
- (5) Numerične metode za aproksimacijo rešitev

Gronwallova lema (Thomas Hakon Gronwall, 1877-1932)

Lema. Naj bo $g(t) \geq 0$ nenegativna zvezna funkcija na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ki zadošča neenakosti

$$g(t) \leq C + K \int_a^t g(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

za nek par nenegativnih konstant $C, K \geq 0$. Potem velja

$$g(t) \leq Ce^{K(t-a)}, \quad t \in [a, b].$$

Dokaz: Definirajmo funkcijo

$$G(t) := C + K \int_a^t g(s) ds \geq g(t), \quad t \in [a, b].$$

$$\dot{G}(t) = Kg(t), \quad \frac{\dot{G}}{G} = K \frac{g}{G} \leq K, \quad \log G(t) \leq \log G(a) + K(t-a),$$

$$g(t) \leq G(t) \leq G(a)e^{K(t-a)} = Ce^{K(t-a)}.$$

Uporaba: Ocena oddaljenosti tokovnic

Trditev. Naj bo $x(t, y)$ rešitev začetnega problema

$$\dot{x}(t, y) = f(t, x(t, y)), \quad x(t_0, y) = y$$

na nekem intervalu $t_0 \in I$ in za neko množico začetnih vrednosti $y \in U \subset \mathbb{R}$.

Denimo, da graf funkcije x leži v domeni $D \subset \mathbb{R}^2$, na kateri velja Lipschitzova ocena

$$|f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|.$$

Tedaj velja naslednja ocena za razdaljo med dvema tokovnicama:

$$|x(t, y) - x(t, y_0)| \leq |y - y_0|e^{L|t-t_0|}.$$

Tokovnici se torej oddaljujeta največ eksponentno. Primer z eksponentno rastjo je npr. kar $\dot{x} = x$ z rešitvijo $x(t, x_0) = x_0 e^t$.

Dokaz

$$x(t, y) = y + \int_{t_0}^t f(s, x(s, y)) ds$$

$$x(t, y) - x(t, y_0) = y - y_0 + \int_{t_0}^t (f(s, x(s, y)) - f(s, x(s, y_0))) ds$$

Definirajmo funkcijo

$$g(t) := |x(t, y) - x(t, y_0)| \geq 0.$$

Po trikotniški neenakosti in z uporabo Lipschitzove ocene člena pod integralom sledi

$$g(t) \leq |y - y_0| + L \left| \int_{t_0}^t g(s) ds \right|.$$

Po Gronwallovi lemi sledi

$$g(t) \leq |y - y_0| e^{L|t-t_0|}$$

in lema je dokazana.

Splošnejša oblika Gronwallove leme

Lema. Naj bosta $g(t)$ in $u(t)$ nenegativni zvezni funkciji na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ in $C \geq 0$ konstanta. Če je

$$g(t) \leq C + \int_a^t u(s)g(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

potem velja

$$g(t) \leq C e^{\int_a^t u(s)ds}, \quad t \in [a, b].$$

Dokaz. Denimo najprej, da je $C > 0$. Tedaj

$$G(t) := C + \int_a^t u(s)g(s)ds \geq C > 0, \quad t \in [a, b],$$

$$\dot{G}(t) = u(t)g(t) \leq u(t)G(t), \quad t \in [a, b].$$

(Neenakost $g(t) \leq G(t)$ sledi iz definicije funkcije G in predpostavke leme.) Z integracijo dobimo

$$g(t) \leq G(t) \leq C e^{\int_a^t u(s)ds}$$

za $t \in [a, b]$. Za $C = 0$ sledi $g(t) \equiv 0$ z limitnim preходом.

Ocena razdalje rešitev pri perturbaciji enačbe

Soroden problem je ocena razdalje med tokovnicami različnih sistemov diferencialnih enačb. Naj bosta $x(t)$ in $y(t)$ rešitvi problemov

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0; \quad \dot{y} = g(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Denimo, da je $|f - g| \leq \epsilon$ in je L Lipschitzova konstanta za g . Tedaj je

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &= x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - g(s, x(s))) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t (g(s, x(s)) - g(s, y(s))) ds \\ |x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \epsilon |t - t_0| + L \left| \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds \right|. \end{aligned}$$

Iz Gronwallove leme sledi

$$|x(t) - y(t)| \leq (|x_0 - y_0| + \epsilon |t - t_0|) e^{L|t-t_0|}.$$

Gladka odvisnost rešitve od začetnega pogoja

Sedaj bomo dokazali naslednji izrek, ki smo ga že omenili v 6. predavanju.

Izrek. Naj bo D domena v $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ in $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ preslikava razreda $\mathcal{C}^r$ za nek $r \in \mathbb{N}$. Potem sta rešitev $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ začetnega problema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}$$

in njen t -odvod funkciji razreda $\mathcal{C}^r$ v spremenljivkah (t, y) .

Opomba: Vsaka funkcija razreda $\mathcal{C}^1$ na neki domeni je lokalno Lipschitzova. Za funkcije na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ to sledi direktno iz Lagrangejeve formule

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad \text{za nek } \xi \in (x_1, x_2).$$

Če zožimo f na nek zaprt omejen interval $J \subset I$ in definiramo $L = \max\{|f'(\xi)| : \xi \in J\}$, sledi

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \quad \text{za vsak par } x_1, x_2 \in J.$$

Podobno dokažemo rezultat za funkcije več spremenljivk.

Dokaz, $r = 1$

Omejimo se na primer $n = 1$, ko je $x = x(t, y)$ skalarna funkcija.

Najprej bomo obravnavali primer $r = 1$, torej je funkcija $f(t, x)$ zvezno parcialno odvedljiva in je funkcija $x(t, y)$ rešitev enačbe

$$\dot{x}(t, y) = f(t, x(t, y)), \quad x(t_0, y) = y$$

na nekem kompaktnem intervalu $t \in I$. Dokazati želimo, da parcialni odvod

$$\psi(t, y) := \frac{\partial x}{\partial y}(t, y), \quad \psi(t_0, y) = 1$$

obstaja za $t \in I$. Če ta odvod obstaja, potem z odvajanjem osnovne enačbe po spremenljivki y vidimo, da ψ zadošča enačbi

$$\dot{\psi}(t, y) = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial y}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, y))\psi(t, y), \quad \psi(t_0, y) = 1.$$

To je družina homogenih linearnih diferencialnih enačb, ki je zvezno odvisna od parametra y . Imenuje se *linearizacija* prvotne enačbe vzdolž rešitve $x(t, y)$.

Po eksistenčnem izreku rešitev $\psi(t, y)$ obstaja in je zvezna. Prav tako je njen t -odvod $\dot{\psi}(t, y)$ zvezna funkcija, kar vidimo iz desne strani zgornje enačbe.

Dokaz, $r = 1$

Sedaj bomo dokazali, da je rešitev $x(t, y)$ osnovne enačbe zares odvedljiva po y in velja $\frac{\partial x}{\partial y}(t, y) = \psi(t, y)$, kjer je $\psi(t, y)$ rešitev zgornje linearne DE.

Naj bo $D' \subset D \subset \mathbb{R}^2$ malce manjša domena, ki vsebuje graf opazovane rešitve $x(t, y)$. Ker je f razreda $\mathcal{C}^1$, obstaja za vsak $\epsilon > 0$ tak $\delta > 0$ (neodvisen od t z danega kompaktnega intervala), da za vsak par točk $x, x_0 \in D'$ velja

$$f(t, x) - f(t, x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)(x - x_0) + R(t, x, x_0),$$

$$|x - x_0| < \delta \implies |R(t, x, x_0)| < \epsilon|x - x_0|.$$

Naj bosta $x(t, y)$ in $x(t, y_0)$ dve rešitvi iz dane družine, pri čemer bomo y_0 fiksirali, y pa spreminjali.

Z integracijo diferencialnih enačb za x in ψ dobimo naslednje identitete.

Dokaz, $r = 1$

$$\begin{aligned} x(t, y) - x(t, y_0) &= y - y_0 + \int_{t_0}^t (f(s, x(s, y)) - f(s, x(s, y_0))) ds \\ &= y - y_0 + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, y_0)) (x(s, y) - x(s, y_0)) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t R(s, x(s, y_0), x(s, y)) ds \end{aligned}$$

$$\psi(t, y_0) = 1 + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, y_0)) \psi(s, y_0) ds$$

$$\psi(t, y_0)(y - y_0) = y - y_0 + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, y_0)) \psi(s, y_0)(y - y_0) ds.$$

Odštejemo drugo enačbo od prve:

$$\begin{aligned} g(t, y) &:= x(t, y) - x(t, y_0) - \psi(t, y_0)(y - y_0) \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, y_0)) g(s, y) ds + \int_{t_0}^t R(s, x(s, y_0), x(s, y)) ds. \end{aligned}$$

Dokaz, $r = 1$

Sedaj bomo ocenili ostanek R in funkcijo g . Spomnimo se:

$$|x - x_0| < \delta \implies |R(t, x, x_0)| < \epsilon|x - x_0| \text{ za vsak } t \in I.$$

Iz Gronwallove neenakosti smo dobili oceno

$$|x(t, y) - x(t, y_0)| \leq |y - y_0| e^{L|t-t_0|} < \delta,$$

kjer je L Lipschitzova konstanta za $f(t, x)$ v spremenljivki x . Zadnja ocena $< \delta$ velja, če je y dovolj blizu y_0 in je $|t - t_0| \leq C$ za nek $C > 0$. Odtod sledi

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t R(s, x(s, y_0), x(s, y)) ds \right| &\leq \epsilon C \max_{|s-t_0| \leq C} |x(s, y) - x(s, y_0)| \\ &\leq \epsilon C |y - y_0| e^{CL}. \end{aligned}$$

Izberimo $M > 0$, tako da velja

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, y_0)) \right| \leq M \quad \text{za } |t - t_0| \leq C.$$

Iz definicije g in zgornjih ocen sledi za $|t - t_0| \leq C$

$$|g(t, y)| \leq \epsilon C |y - y_0| e^{CL} + M \left| \int_{t_0}^t |g(s, y)| ds \right|$$

Dokaz, $r = 1$

Iz Gronwallove leme sledi za $|t - t_0| \leq C$:

$$|g(t, y)| \leq \epsilon C |y - y_0| e^{CL} e^{M|t-t_0|} \leq \epsilon C |y - y_0| e^{C(L+M)}.$$

Za dan $\epsilon > 0$ ta ocena velja, če je razlika $|y - y_0|$ dovolj majhna, pri čemer so C, L, M konstante (neodvisne od y). To ravno pomeni, da je

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{|g(t, y)|}{|y - y_0|} = 0 \quad \text{za vsak } t \in I.$$

Ker po definiciji funkcije g velja

$$x(t, y) - x(t, y_0) = \psi(t, y_0)(y - y_0) + g(t, y),$$

sledi iz definicije parcialnega odvoda, da je

$$\frac{\partial x}{\partial y}(t, y_0) = \psi(t, y_0), \quad t \in I,$$

kar smo želeli dokazati.

S tem je izrek o regularnosti dokazan za $r = 1$. Iz analize dokaza lahko vidimo, da velja isti rezultat tudi ob prisotnosti dodatnih parametrov v enačbi in rešitvi.

Skica dokaza za $r > 1$

Denimo sedaj, da je funkcija f razreda $\mathcal{C}^2$. Naj bo $x(t, y)$ rešitev problema

$$\dot{x}(t, y) = f(t, x(t, y)), \quad x(t_0, y) = y.$$

Videli smo, da njen prvi parcialni odvod

$$\psi(t, y) := \frac{\partial x}{\partial y}(t, y)$$

obstaja in zadošča homogeni linearni diferencialni enačbi

$$\dot{\psi}(t, y) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, y)) \psi(t, y), \quad \psi(t_0, y) = 1.$$

Sedaj bi radi dokazali, da je $\psi(t, y)$ zvezno parcialno odvedljiva na spremenljivko y . Če je odvedljiva, potem njen odvod

$$\phi(t, y) := \frac{\partial \psi}{\partial y}(t, y)$$

zadošča naslednji enačbi, ki jo dobimo z odvajanjem enačbe za ψ :

Skica dokaza za $r > 1$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t, y) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, y)) \psi(t, y) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, y)) \phi(t, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x(t, y)) \psi(t, y)^2, \quad \phi(t_0, y) = 0. \end{aligned}$$

To je družina nehomogenih linearnih diferencialnih enačb z zveznimi koeficienti in parametrom y za funkcijo $\phi(t, y)$. Taka enačba ima rešitev na vsakem intervalu, kjer so koeficienti definirani in zvezni.

S tem smo problem reducirali na prejšnji primer za $r = 1$ s tem, da imamo sedaj družino diferencialnih enačb, odvisnih od parametra y . Ta razlika ni bistvena in podobno kot prej lahko pokažemo z uporabo Gronwallove leme, da je $\phi(t, y)$ dejansko enak parcialnemu odvodu $\psi(t, y)$ po y .

Analogno nadaljujemo za višje odvode. V induktivnem koraku predpostavimo, da je f razreda $\mathcal{C}^{r+1}$. Enačbo za r -ti odvod $\frac{\partial^r}{\partial y^r} x(t, y)$ odvajamo po y in dobimo novo linearno diferencialno enačbo z zveznimi koeficienti za $(r + 1)$ -ti odvod $\frac{\partial^{r+1}}{\partial y^{r+1}} x(t, y)$. Nato postopamo kot zgoraj.

Taylorjev razvoj rešitve enačbe

Denimo, da je funkcija $x(t)$ rešitev problema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Iz definicije sledi

$$x(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|).$$

Če je f razreda $\mathcal{C}^1$, lahko osnovno enačbo odvajamo po t in dobimo

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) \dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) f(t, x(t)).$$

V točki $t = t_0$ je torej

$$\ddot{x}(t_0) = f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0) f(t_0, x_0),$$

$$x(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} (f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0) f(t_0, x_0)) (t - t_0)^2 + o(|t - t_0|^2).$$

Če je f razreda $\mathcal{C}^r$, lahko enačbo r -krat odvajamo in s tem dobimo Taylorjev razvoj rešitve $x(t)$ okrog $t = t_0$ do reda $r + 1$.

Višje odvode lahko na krajši način zapišemo z uvedbo diferencialnega operatorja

$$V = \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ta operator predstavlja vektorsko polje $V(t, x) = (1, f(t, x))$ na ravnini, ki pripada sistemu enačb

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = f(t, x).$$

Vrednost operatorja V na poljubni funkciji $g(t, x)$ je nova funkcija

$$V(g) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial x} \right) g = g_t + g_x f.$$

Z odvajanjem funkcije $g(t, x(t))$, kjer je $x(t)$ rešitev enačbe, dobimo

$$\frac{d}{dt}g(t, x(t)) = g_t(t, x(t)) + g_x(t, x(t))f(t, x(t)) = V(g)(t, x(t)).$$

Če to uporabimo na funkciji $g = f$, dobimo iz formule na prejšnji strani

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))f(t, x(t)) = V(f)(t, x(t)).$$

Če uporabimo isto formulo za funkcijo $g = V(f)$, dobimo

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) = V(V(f))(t, x(t)) = V^2(f)(t, x(t)).$$

Če je f razreda $\mathcal{C}^r$, lahko induktivno nadaljujemo in dobimo za vsak $k \in \{1, \dots, r+1\}$:

$$\frac{d^k}{dt^k}x(t) = V^{k-1}(f)(t, x(t)).$$

S tem dobimo Taylorjev razvoj rešitve $x(t)$ okrog $t = t_0$:

$$x(t) = x(t_0) + \sum_{k=1}^{r+1} \frac{1}{k!} V^{k-1}(f)(t_0, x(t_0))(t - t_0)^k + o(|t - t_0|^{r+1}).$$

Taylorjev razvoj toka vektorskega polja

Analogna Taylorjeva formula velja za rešitve sistema diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}),$$

kjer je $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$. Če je $\mathbf{F}$ razreda $\mathcal{C}^1$, dobimo z odvajanjem rešitve

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(t)) \dot{x}_j(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(t)) f_j(t, \mathbf{x}(t)). \end{aligned}$$

Za k -to komponento $x_k(t)$ rešitve $\mathbf{x}(t)$ imamo

$$\ddot{x}_k(t) = \frac{\partial}{\partial t} f_k(t, \mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(t)) f_j(t, \mathbf{x}(t))$$

Prirejeni diferencialni operator je torej

$$V = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Taylorjev razvoj toka vektorskega polja

Če definiramo

$$V(\mathbf{F}) = V(f_1, \dots, f_n) := (V(f_1), \dots, V(f_n)),$$

lahko enačbo za $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ zapišemo v vektorski obliki

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = V(\mathbf{F})(t, \mathbf{x}(t)).$$

Če je $\mathbf{F}$ razreda $\mathcal{C}^r$, dobimo z indukcijo

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{x}(t) = V^{k-1}(\mathbf{F})(t, \mathbf{x}(t)), \quad k = 1, 2, \dots, r+1,$$

pri čemer je

$$V^k(\mathbf{F}) = (V^k(f_1), \dots, V^k(f_n)).$$

Taylorjev razvoj rešitve okrog neke začetne točke $(t_0, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0)$ je torej

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^{r+1} \frac{1}{k!} V^{k-1}(\mathbf{F})(t_0, \mathbf{x}_0) (t - t_0)^k + o(|t - t_0|^{r+1}).$$

Uporaba pri numeričnem reševanju

Radi bi poiskali približno rešitev problema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

na nekem intervalu $[t_0, b]$. Interval razdelimo na veliko število n enakih delov dolžine $\delta = (b - t_0)/n$ in uvedemo delilne točke

$$t_k = t_0 + k\delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

V najpreprostejši linearni aproksimaciji aproksimiramo rešitev $x(t)$ na prvem intervalu $[t_0, t_1]$ z linearno funkcijo

$$x_1(t) = x_0 + \dot{x}(t_0)(t - t_0) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

Označimo

$$x_1 = x_1(t_1) = x_0 + f(t_0, x_0)\delta.$$

Na intervalu $[t_1, t_2]$ na enak način določimo aproksimativno linearno rešitev

$$x_2(t) = x_1 + \dot{x}(t_1)(t - t_1) = x_1 + f(t_1, x_1)(t - t_1).$$

Tako nadaljujemo do konca.

Uporaba pri numeričnem reševanju

Napaka na vsakem intervalu je reda velikosti $o(1/n)$; kumulativna napaka na n intervalih je torej $n \cdot o(1/n)$. Ker je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot o(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(1/n)}{1/n} = 0,$$

zaporedje tako dobljenih odsekov linearnih približkov konvergira k pravi rešitvi enakomerno na intervalu $[t_0, b]$, ko gre število delilnih točk proti ∞ .

Če je f razreda $\mathcal{C}^r$ za nek $r \in \mathbb{N}$, lahko dobimo boljše približke rešitve z uporabo Taylorjevih polinomov stopnje $r + 1$. Npr., pri $r = 1$ vzamemo na intervalu $[t_0, t_1]$ kvadratični približek

$$x_1(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}(f_t + f_x f)(t_0, x_0)(t - t_0)^2.$$

Označimo $x_1 = x_1(t_1)$. Na naslednjem intervalu $[t_1, t_2]$ vzamemo približek

$$x_2(t) = x_1 + f(t_1, x_1)(t - t_1) + \frac{1}{2}(f_t + f_x f)(t_1, x_1)(t - t_1)^2.$$

Tako nadaljujemo do konca. Enakomerna napaka pri uporabi Taylorjevih polinomov reda $r + 1$ je reda velikosti $n \cdot o(1/n^{r+1}) = o(1/n^r)$.

Vsebina 8. predavanja

Obravnavali bomo naslednje teme o tokovih vektorskih polj.

- (1) Fundamentalna domena toka
- (2) Osnovne lastnosti toka
- (3) Kompletna vektorska polja
- (4) Uporaba funkcij Lyapunova
- (5) Liouvilleova formula za volumen toka

Enoličnost rešitev

Opazujemo sistem diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

na domeni $D \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$, kjer je $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$.

Lemma 0.1. *Naj bosta $\mathbf{x}(t)$ in $\mathbf{y}(t)$ rešitvi danega sistema enačb, ki sta definirani na intervalih $I \subset \mathbb{R}$ oziroma $J \subset \mathbb{R}$. Če za neko točko $t_0 \in I \cap J$ velja $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$, potem velja $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ za vse $t \in I \cap J$.*

Dokaz: Množica

$$E = \{t \in I \cap J : \mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)\}$$

je zaprta v intervalu $I \cap J$, ker sta obe funkciji zvezni.

Po izreku o enoličnosti rešitve začetnega problema sledi, da je E tudi odprta. Ker je $I \cap J$ povezana množica, sledi $E = I \cap J$.

Maksimalna domena rešitve

Posledica. Za vsako točko $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ ima začetni problem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ natanko eno rešitev $\mathbf{x}(t)$ na nekem največjem odprtem intervalu

$$I_{t_0, \mathbf{x}_0} = (\alpha(t_0, \mathbf{x}_0), \omega(t_0, \mathbf{x}_0)) \subset \mathbb{R},$$

ki vsebuje točko t_0 : $-\infty \leq \alpha(t_0, \mathbf{x}_0) < t_0 < \omega(t_0, \mathbf{x}_0) \leq +\infty$.

To pomeni, da dane rešitve ne moremo nadaljevati na noben večji interval, ki vsebuje $I_{t_0, \mathbf{x}_0}$. Lahko pa morda najdemo rešitve na drugi intervalih, disjunktih z $I_{t_0, \mathbf{x}_0}$. Te rešitve nimajo ničesar opraviti z opazovano.

Maksimalni interval rešitve $I_{t_0, \mathbf{x}_0}$ dobimo tako, da v množico vseh parov $(I, \mathbf{x})$, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ odprt interval in je $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ rešitev, uvedemo ekvivalenčno relacijo $\sim$ tako, da proglasimo poljubna dva para $(I, \mathbf{x})$ in $(J, \mathbf{y})$ za ekvivalentna, če je $I \cap J \neq \emptyset$ in je $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ na $I \cap J$. Relacijo nato razširimo po tranzitivnosti:

$$(I, \mathbf{x}) \sim (J, \mathbf{y}) \text{ in } (J, \mathbf{y}) \sim (K, \mathbf{z}) \implies (I, \mathbf{x}) \sim (K, \mathbf{z}).$$

Za $I_{t_0, \mathbf{x}_0}$ vzamemo unijo vseh intervalov v ekvivalenčnem razredu, ki vsebuje neko lokalno rešitev danega začetnega problema okrog $(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Tokovnice so paroma disjunktne

Zgornji argument pokaže naslednjo pomembno lastnost maksimalnih rešitev.

Trditev. Če sta $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ maksimalni rešitvi sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, potem sta njuna grafa v faznem prostoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ bodisi disjunktne, bodisi sovpadata.

Če je sistem avtonomen, torej $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, potem sta poljubni dve maksimalni trajektoriji v $\mathbb{R}^n$ bodisi disjunktne, bodisi sovpadata.

Prva trditev je posledica enoličnosti lokalnih rešitev in definicije maksimalnih rešitev.

Za dokaz drugega dejstva opazimo, da je za vsako rešitev $\mathbf{x}(t)$ avtonomnega sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ tudi $t \mapsto \mathbf{x}(t + s)$ njegova rešitev za poljuben $s \in \mathbb{R}$.

Če se dve maksimalni tokovnici $\mathbf{x}(t)$ in $\mathbf{y}(t)$ ujemata v paru točk, torej $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_1)$, potem se tokovnici $\mathbf{x}(t)$ in $t \mapsto \mathbf{y}(t + t_1 - t_0)$ ujemata pri $t = t_0$ in zato po enoličnosti in maksimalnosti sovadata.

Avtonomni sistemi

Vsaka trajektorija avtonomnega sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ je bodisi vložena krivulja, ki je lahko odprta ali sklenjena (periodična orbita), bodisi stacionarna točka (ničla) vektorskega polja $\mathbf{F}$. Tokovnica, ki je krivulja, ne vsebuje nobene stacionarne točke. Tokovnice so paroma disjunktne. Množica vseh trajektorij se imenuje *fazni portret sistema*.

Fundamentalna domena in lastnosti toka

Pojem toka vektorskega polja oziroma, ekvivalentno, sistema diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

smo uvedli že v 5. predavanju. Za poljubno začetno točko $(t_0, \mathbf{x}_0)$ označimo s $t \mapsto \phi_{t, t_0}(\mathbf{x}_0)$ rešitev začetnega problema s $\phi_{t_0, t_0}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. Preslikava

$$(t, \mathbf{x}_0) \mapsto \phi_{t, t_0}(\mathbf{x}_0)$$

se imenuje *tok vektorskega polja* $\mathbf{F}$, ki je inicializiran v času t_0 . Množica

$$\begin{aligned} \Omega_{t_0} &= \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n : (t_0, \mathbf{x}) \in D, t \in I_{t_0, \mathbf{x}}\} \\ &= \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n : (t_0, \mathbf{x}) \in D, \alpha(t_0, \mathbf{x}) < t < \omega(t_0, \mathbf{x})\} \end{aligned}$$

se imenuje *fundamentalna (maksimalna) domena toka* ϕ_{t, t_0} . To je množica vseh parov $(t, \mathbf{x})$, za katere je $\phi_{t, t_0}(\mathbf{x})$ definiran. Ta domena je v splošnem odvisna od t_0 , razen če je polje $\mathbf{F}$ avtonomno.

Direktno iz definicij in izreka o lastnosti rešitev sledijo naslednja dejstva:

$$(1) \quad \phi_{t,t} = \text{Id}, \quad \phi_{t,s} \circ \phi_{s,u} = \phi_{t,u}.$$

(2) Naj bo $\mathbf{F}$ razreda $\mathcal{C}^r$, $r \in \mathbb{N}$. Za vsak par števil $s, t \in \mathbb{R}$ je preslikava

$$\{\mathbf{x} : (t, \mathbf{x}) \in \Omega_s\} \ni \mathbf{x} \longrightarrow \phi_{t,s}(\mathbf{x}) \in D \subset \mathbb{R}^n$$

$\mathcal{C}^r$ difeomorfizem na svojo sliko in velja $\phi_{t,s}^{-1} = \phi_{s,t}$.

Tok avtonomnega vektorskega polja

V primeru avtonomnega vektorskega polja $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ označimo s

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \phi_{t,0}(\mathbf{x})$$

tok polja, ki je inicializiran v času $t_0 = 0$. To pomeni, da je

$$\frac{d}{dt}\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\phi_t(\mathbf{x})), \quad \phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Za fiksen s je očitno $t \mapsto \phi_{t+s}(\mathbf{x})$ tokovnica, ki je v času $t = 0$ v točki $\phi_s(\mathbf{x})$. Ker je tudi $t \mapsto \phi_t(\phi_s(\mathbf{x}))$ tokovnica z isto začetno točko $\phi_s(\mathbf{x})$ pri $t = 0$, iz enoličnosti sledi

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \quad \phi_0 = \text{Id}_D, \quad \phi_{-t} = \phi_t^{-1}$$

na maksimalnih domenah danih preslikav. Odtod sledi

$$\phi_{t,s} = \phi_t \circ \phi_s^{-1}.$$

Družina $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ s temi lastnostmi se imenuje *lokalna 1-parametrična grupa difeomorfizmov* na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Beseda *lokalna* se nanaša na dejstvo, da je domena posamezne preslikave ϕ_t lahko prava poddomena v D .

Preslikava $\mathbf{x} \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ se imenuje *premik za čas t* (angl. *time-forward map*).

Infinitezimalni generator, kompletna vektorska polja

Obratno: Če je $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ lokalna 1-parametrična grupa difeomorfizmov na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in definiramo avtonomno vektorsko polje $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt}\phi_t(\mathbf{x}) \right|_{t=0}, \quad \mathbf{x} \in D,$$

potem je $\phi_t(\mathbf{x})$ ravno tok polja $\mathbf{F}$. To vidimo z odvajanjem identitete $\phi_{t+s}(\mathbf{x}) = \phi_t(\phi_s(\mathbf{x}))$ po t pri $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \phi_t(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{t+s}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(\phi_s(\mathbf{x})) = \mathbf{F}(\phi_s(\mathbf{x})).$$

To vektorsko polje $\mathbf{F}$ se imenuje *infinitezimalni generator* grupe $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Kompletna vektorska polja

Avtonomno vektorsko polje $\mathbf{F}$ na $D \subset \mathbb{R}^n$ se imenuje *kompletno*, če za vsako točko $\mathbf{x} \in D$ tok $t \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ obstaja za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Z drugo besedo, avtonomno vektorsko polje $\mathbf{F}$ je kompletno, če (in samo če) je fundamentalna domena toka enaka $\Omega = \mathbb{R} \times D$.

V tem primeru je družina $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ *enoparametrična grupa avtomorfizmov* domene D . (Avtomorfizem je difeomorfizem D na D .)

Primer 1. Z metodo ločitve spremenljivk smo videli, da ima enačba

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

rešitev

$$x(t; x_0) = \frac{x_0}{1 - t x_0}.$$

Če zamenjamo začetni pogoj x_0 z x in rešitev označimo s $\phi_t(x)$, vidimo

$$\phi_t(x) = \frac{x}{1 - t x} \quad \dots \quad \text{tok polja } F(x) = x^2.$$

Z odvajanjem po t pri $t = 0$ dobimo infinitezimalni generator

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \phi_t(x) = x^2 = F(x).$$

Fundamentalna domena je

$$\Omega = \{(t, x) : x \geq 0, -\infty < t < 1/x\} \cup \{(t, x) : x < 0, 1/x < t < +\infty\}.$$

Vektorsko polje $F(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$ torej ni kompletno.

Primer 2. Oglejmo si sistem dveh enačb:

$$\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = -xy.$$

Poiskati želimo tok $\phi_t(x, y)$ in najti njegovo fundamentalno domeno. V ta namen najprej rešimo zgornji enačbi ob začetem pogoju

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Prva enačba je homogena linearna v x in neodvisna od y ; rešitev je

$$x(t) = x_0 e^{2t}.$$

Vstavimo rešitev v drugo enačbo:

$$\dot{y} = -x_0 e^{2t} y, \quad y(0) = y_0.$$

To je spet homogena linearna enačba in rešitev je

$$y(t) = y_0 e^{-\int_0^t x_0 e^{2s} ds} = y_0 e^{x_0(1-e^{2t})/2}.$$

Tok polja $\mathbf{F}(x, y) = (2x, -xy)$ je torej enak

$$\phi_t(x, y) = \left(x e^{2t}, y e^{x(1-e^{2t})/2} \right)$$

Fundamentalna domena je $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{(x,y)}^2$, torej je polje kompletno.

Tokovnice z omejenim maksimalnim intervalom

Trditev. Naj bo $I = (\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ maksimalni interval neke rešitve $\mathbf{x}(t)$ sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Če je $\omega < +\infty$, potem za vsako kompaktno množico $K \subset D$ obstaja število $c \in I$, tako da velja

$$\mathbf{x}(t) \in D \setminus K \quad \text{za vsak } c < t < \omega.$$

Analogen rezultat velja za spodnjo mejo $\alpha > -\infty$.

Torej tokovnica $\mathbf{x}(t) \in D$ zapusti vsako kompaktno množico v D , ko gre t proti končni spodnji ali zgornji meji maksimalnega intervala. To pomeni, da gre točka $\mathbf{x}(t)$ proti robu domene D ali pa proti neskončnosti v $\mathbb{R}^n$. Taka pot se imenuje *divergentna* v D .

Trditev pove, da je edini možni razlog, zakaj neka tokovnica ne živi večno, da v končnem času doseže rob domene D sistema v $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Analogna lastnost velja tudi za neavtonomne sisteme, le da je v tem primeru D domena v $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$. Graf $(t, \mathbf{x}(t))$ rešitve je *divergenten* v D , ko gre čas t proti končni zgornji ali spodnji meji maksimalnega intervala.

Dokaz trditve. Denimo, da za neko kompaktno množico $K \subset D$ ni takega števila c . To pomeni, da obstaja naraščajoče zaporedje $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ števil v $I = (\alpha, \omega)$ z $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = \omega$, za katere je $\mathbf{x}(t_j) \in K$.

Po eksistenčnem izreku ima vsaka točka $p \in D$ odprto okolico $U_p \subset D$ in število $\epsilon_p > 0$, tako da ima vsak začetni problem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y} \in U_p$ rešitev na intervalu $(-\epsilon_p, +\epsilon_p)$.

Ker je množica K kompaktna, končno mnogo takih okolic pokriva K . Naj bo $\epsilon > 0$ najmanjše od ustreznih števil. Tedaj za katerokoli točko $p \in K$ rešitev, ki gre pri $t = 0$ skozi p , obstaja (vsaj) na intervalu $(-\epsilon, +\epsilon)$.

Izberimo t_j v zgornjem zaporedju tako, da je $\omega - t_j < \epsilon$. Naj bo $\mathbf{y}(t)$ rešitev na intervalu $t \in (-\epsilon, +\epsilon)$ z začetnim pogojem $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(t_j) \in K$. Tedaj lahko sestavimo novo rešitev $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ na večjem intervalu $(\alpha, t_j + \epsilon) \supsetneq I$ takole:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t), & \alpha < t \leq t_j; \\ \mathbf{y}(t - t_j), & t_j \leq t < t_j + \epsilon. \end{cases}$$

To je v protislovju s predpostavko, da je I maksimalni interval rešitve. Analogno dokažemo trditev glede spodnje meje $\alpha > -\infty$.

Posledica. Če tokovnica $\mathbf{x}(t)$ na maksimalnem intervalu $I \subset \mathbb{R}$ leži v neki kompaktni množici $K \subset \mathbb{R}^n$, potem je $I = \mathbb{R}$, torej je kompletna (živi večno).

Če vsaka tokovnica danega sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ leži v neki kompaktni množici, potem je polje $\mathbf{F}$ kompletno (vse njegove tokovnice živijo večno).

Primer. Naj bo $u(x, y)$ gladka funkcija na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$, tako da je vsaka njena nivojnica $\{(x, y) \in D : u(x, y) = c\}$ za $c \in \mathbb{R}$ kompaktna (ali prazna). Tedaj je prirejeni Hamiltonov sistem

$$\dot{x} = -u_y, \quad \dot{y} = u_x$$

na D kompleten. Videli smo namreč, da tok tega sistema leži v nivojnicah $\{u = c\}$, ki so kompaktne.

Analogen rezultat velja za Hamiltonove sisteme na domenah v $\mathbb{R}^{2n}$.

Posledica: fundamentalna domena toka je odprta

Naj bo Ω_{t_0} fundamentalna domena toka polja $\mathbf{F}$ na $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Omega_{t_0} = \{(t, \mathbf{x}) : (t_0, \mathbf{x}) \in D, \alpha(t_0, \mathbf{x}) < t < \omega(t_0, \mathbf{x})\}.$$

Trditev. Funkcija $-\infty \leq \alpha(t_0, \mathbf{x}) < +\infty$ je navzgor polzvezna v spremenljivki $\mathbf{x}$, funkcija $-\infty < \omega(t_0, \mathbf{x}) \leq +\infty$ je navzdol polzvezna in fundamentalna domena Ω_{t_0} je odprta podmnožica množice $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dokaz Oglejmo si trditev glede funkcije $\omega(t_0, \mathbf{x})$.

Biti navzdol pozvezna pomeni, da za vsak $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ in število $c < \omega(t_0, \mathbf{x}_0)$ obstaja odprta okolica $U \subset \mathbb{R}^n$ točke $\mathbf{x}_0$, tako da za vsak $\mathbf{x} \in U$ velja $c < \omega(t_0, \mathbf{x})$. To pomeni, da se $\omega(t_0, \mathbf{x})$ ne more nezvezno zmanjšati.

To vidimo takole. Izberimo število c_1 , da je $c < c_1 < \omega(t_0, \mathbf{x}_0)$. Tokovnica $\phi_{t,t_0}(\mathbf{x}_0)$ torej obstaja za vsak $t \in [t_0, c_1]$. Ta interval je kompakten in zato je

$$C = \{(t, \phi_{t,t_0}(\mathbf{x}_0)) : t_0 \leq t \leq c_1\}$$

kompaktna podmnožica domene D .

Naj bo V neka okolica tira C s kompaktnih zaprtjem $\bar{V} \subset D$. Po Gronwallovi lemi (oz. izreku o zvezni odvisnosti rešitev od začetnega pogoja) obstaja okolica U točke $\mathbf{x}_0$, tako da za vsak $\mathbf{x} \in U$ in vsak $t_0 \leq t \leq c_1$ velja $\phi_{t,t_0}(\mathbf{x}) \in V$, v kolikor seveda $\phi_{t,t_0}(\mathbf{x})$ obstaja.

Tokovnica $\phi_{t,t_0}(\mathbf{x})$ torej ne more divergirati proti robu domene D (ali proti ∞) na intervalu $t_0 \leq t \leq c_1$, zato obstaja vsaj do časa $t = c_1$ (po trditvi o tokovnicah z omejenim časovnim intervalom). To ravno pomeni, da je $\omega(t_0, \mathbf{x}) \geq c_1 > c$ za vsak $\mathbf{x} \in U$. S tem smo dokazali, da je funkcija $\mathbf{x} \mapsto \omega(t_0, \mathbf{x})$ navzdol polzvezna.

Analogen sklep lahko naredimo za $t \rightarrow \alpha(t_0, \mathbf{x})$, le da so neenakosti sedaj obrnjene in je slednja navzgor polzvezna (to je, ne more se nezvezno povečati).

Pokažimo še, da je fundamentalna domena Ω_{t_0} odprta. Naj bo $(t_1, \mathbf{x}_1) \in \Omega_{t_0}$. Izberemo števili c_1, c_2 , tako da je $\alpha(t_0, \mathbf{x}_1) < c_1 < t_1 < c_2 < \omega(t_0, \mathbf{x}_1)$. Po pravkar dokazanem obstaja okolica U točke $\mathbf{x}_1$, da je $\alpha(t_0, \mathbf{x}) < c_1 < c_2 < \omega(t_0, \mathbf{x})$ za vsak $\mathbf{x} \in U$. Torej je množica $V := \{(t, \mathbf{x}) : c_1 < t < c_2, \mathbf{x} \in U\} \subset \Omega_{t_0}$ odprta okolica točke $(t_1, \mathbf{x}_1)$.

Funkcije Lyapunova in kompletnost v pozitivnem času

Zvezna funkcija $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ se imenuje *funkcija izčrpanja*, če je vsaka podnivojnica $\{u \leq c\}$, $c \in \mathbb{R}$, kompaktna. Ekvivalentno, če gre zaporedje $\mathbf{x}_j \in D$ ($j \in \mathbb{N}$) proti robu D ali ∞ , je $\lim_{j \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}_j) = +\infty$.

Funkcija izčrpanja $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^1(D)$ se imenuje *funkcija Lyapunova* za avtonomen sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ na D , če obstaja kompaktna množica $K \subset D$, tako da velja

$$\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{za vsak } \mathbf{x} \in D \setminus K \quad (\text{pogoj Lyapunova}).$$

Izrek (Lyapunov). Če ima sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ funkcijo Lyapunova, potem je vektorsko polje $\mathbf{F}$ kompletno v pozitivnem času, to je, njegov tok $\phi_t(\mathbf{x})$ obstaja za vse $t \in \mathbb{R}_+$ in $\mathbf{x} \in D$.

Dokaz Naj bo $\mathbf{x}(t)$ poljubna rešitev sistema na maksimalnem intervalu $I = (\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$. Izberimo dovolj velik $c \in \mathbb{R}$, tako da pogoj Lyapunova velja na množici

$$\{u > c\} = D \setminus \{u \leq c\}.$$

Na vsakem intervalu $J \subset I$, na katerem je $\mathbf{x}(t) \in \{u > c\}$, torej velja

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) = \nabla u(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla u(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \leq 0.$$

Zato je funkcija

$$I \ni t \longrightarrow g(t) := u(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}$$

(šibko) monotonno padajoča na vsakem intervalu $J \subset I$, kjer je $g > c$.

Odtod sledi, je funkcija $g(t) = u(\mathbf{x}(t))$ navzgor omejena na $t \in [0, \omega)$. Če je c dovolj velik, da je $g(0) < c$, potem je $g(t) \leq c$ za vsak $t \in [0, \omega)$. (Zakaj?)

To pomeni, da tokovnica $\{\mathbf{x}(t) : 0 \leq t < \omega\}$ leži v kompaktni podmnožici $\{u \leq c\} \subset D$. Odtod sledi $\omega = +\infty$ po izreku o kompletnosti toka.

Primer funkcije Lyapunova

Opazujmo ravninski sistem

$$\dot{x} = -x + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \dot{y} = -2y + \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Sistem je nelinearen in ga je verjetno nemogoče rešiti eksplicitno. Lahko pa pokažemo, da je tok $\phi_t(x, y)$ kompleten v pozitivnem času.

Označimo dano vektorsko polje z $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$. Naj bo $u(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$; očitno je to funkcija izčrpanja na $\mathbb{R}^2$. Velja

$$\nabla u \cdot \mathbf{F} = (2x, y) \cdot (f_1, f_2) = -2(x^2 + y^2) + \frac{3xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Lahko je videti, da je drugi člen v vsoti po absolutni vrednosti navzgor omejen s $3\sqrt{x^2 + y^2}$, zato je pri dovolj veliki vrednosti izraza $x^2 + y^2$ prvi (negativen) člen dominanten, torej velja

$$\nabla u \cdot \mathbf{F} < 0 \quad \text{za dovolj velik } x^2 + y^2.$$

To pomeni, da je u funkcija Lyapunova za ta sistem, zato je polje kompletno v pozitivnem času.

Izrek o kletkah

Naj bo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ vektorsko polje na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Kompaktna množica $K \subset D$ se imenuje *kletka* za tok polja $\mathbf{F}$, če nobena tokovnica ne more izstopiti iz K .

(*Eagles, Hotel California: You can check in, but you can never leave.*)

Natačno: če je $\phi_{t_0}(\mathbf{x}) \in K$ za nek t_0 in $\mathbf{x} \in D$, potem je $\phi_t(\mathbf{x}) \in K$ za vsak $t \geq t_0$. Posledično je tokovnica kompletna v pozitivnem času.

Če je $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija Lyapunova, potem izrek Lyapunova pove, da je vsaka podnivojnica $\{u \leq c\}$ za dovolj velik $c \in \mathbb{R}$ kletka.

Sedaj bomo dokazali naslednji natančnejši izrek.

Izrek. Naj bo $K \subset D$ kompaktna množica oblike $K = \{u \leq 0\}$, kjer je u funkcija razreda $\mathcal{C}^2$ na neki odprti okolici K in je $\nabla u(\mathbf{x}) \neq 0$ za vsak $\mathbf{x} \in \partial K = \{u = 0\}$. Če velja $\nabla u \cdot \mathbf{F} \leq 0$ na ∂K , potem je K kletka za tok polja $\mathbf{F}$.

Opomba Iz pogoja $\nabla u(\mathbf{x}) \neq 0$ za vsak $\mathbf{x} \in \partial K = \{u = 0\}$ sledi po izreku o implicitni funkciji, da je rob ∂K hiperploskev razreda $\mathcal{C}^1$. Funkcija u s to lastnostjo se imenuje *definijska funkcija* množice K .

Dokaz Če izrek ne velja, obstajata točka $\mathbf{x}_0 \in \partial K$ in število $\delta > 0$, tako da je $\mathbf{x}(t) := \phi_t(\mathbf{x}_0) \in D \setminus K$ za vsak $0 < t \leq \delta$ in $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Oglejmo si funkcijo $g(t) = u(\mathbf{x}(t))$ za $0 \leq t \leq \delta$. Iz pogojev sledi $g(0) = 0$ in $g(t) > 0$ za $0 < t \leq \delta$. Njen odvod je enak

$$\dot{g}(t) = \nabla u(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla u(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)).$$

Funkcija $h(\mathbf{x}) := \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})$ je Lipshitzova (ker je u razreda $\mathcal{C}^2$) in je na robu ∂K manjša ali enaka nič po predpostavki izreka.

Zato na nekem zunanem ovratniku roba ∂K (torej na množici $A = \{0 \leq u \leq c\}$ za nek $c > 0$) velja $h(\mathbf{x}) \leq C \text{dist}(\mathbf{x}, \partial K)$ za neko konstanto $C > 0$. Iz izreka o implicitni funkciji sledi, da je v okolici roba ∂K funkcija $|u(\mathbf{x})|$ primerljiva z razdaljo točke $\mathbf{x}$ od roba ∂K , zato velja tudi ocena $h(\mathbf{x}) \leq C u(\mathbf{x})$ za $\mathbf{x} \in A$ z neko drugo konstanto C . Če $\delta > 0$ po potrebi zmanjšamo, odtod sledi

$$\dot{g}(t) = h(\mathbf{x}(t)) \leq C \cdot u(\mathbf{x}(t)) = C g(t), \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Z integracijo) sledi

$$g(t) \leq g(0)e^{Ct} = 0 \quad \text{za } 0 \leq t \leq \delta,$$

kar je v protislovju s predpostavko $g(t) > 0$ za $0 < t \leq \delta$.

Opomba Dokaz izreka o kletki velja pod šibkejšo predpostavko, da je sta gradient ∇u ter vektorsko polje $\mathbf{F}$ Lipschitzovi. To zadošča za ključno oceno

$$\nabla u \cdot \mathbf{F} \leq 0 \quad \text{na } \partial K = \{u = 0\} \implies \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq C \cdot u(\mathbf{x}) \quad \text{na } \{0 \leq u \leq c\}.$$

Če vektorsko polje $\mathbf{F}$ ni Lipschitzovo, izrek o kletki ne velja, kar pokaže naslednji enorazsežni primer na $x \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x} = F(x) = \sqrt{|x|}.$$

Rešitev enačbe

$$x(t) = \begin{cases} t^2/4, & t \geq 0, \\ -t^2/4, & t < 0 \end{cases}$$

je pri $t = 0$ v stacionarni točki $x = 0$ polja $\mathbf{F}$, vendar jo prečka. Interval $K = [-1, 0]$ zadošča vsem ostali predpostavkam izreka o kletki, vendar ni kletka.

Tok na podmnogoterostih

Dokaz izreka o kletkah nam da tudi naslednji rezultat.

Izrek. Naj $M = \{u = 0\}$ zaprta hiperploskev v domeni D , kjer je u funkcija razreda $\mathcal{C}^2$ na odprti okolici M in je $\nabla u(\mathbf{x}) \neq 0$ za vsak $\mathbf{x} \in M$. Če je $\nabla u \cdot \mathbf{F} \equiv 0$ na M , potem za vsako točko $\mathbf{x} \in M$ velja $\phi_t(\mathbf{x}) \in M$ za vse t na maksimalnem intervalu, torej je M invariantna množica toka.

Pogoj $\nabla u \cdot \mathbf{F} = 0$ pomeni, da vektorsko polje $\mathbf{F}$ tangento na M .

Za dokaz izreka zadošča uporabiti argument v dokazu izreka o kletki z obeh strani M , torej tok ne more prečkati M v nobeni smeri.

To je poseben primer naslednjega izreka. Vsaka podmnogoterost $M \subset D$ kodimenzije d je lokalno v okolici vsake svoje točke množica skupnih ničel gladih funkcij $u_1, \dots, u_d$ z linearno neodvisnimi gradienti.

Izrek. Če je M topološko zaprta podmnogoterost domene D in je vektorsko polje $\mathbf{F}$ tangetno na M vzdolž M , potem je M invariantna množica za tok.

Vektorsko polje s kompaktnim nosilcem

Trditev. Vsako vektorsko polje $\mathbf{F}$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ s kompaktnim nosilcem (to je, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ izven neke kompaktne množice $K \subset D$) je kompletno.

Dokaz Vsaka točka $\mathbf{x} \in D \setminus K$ je stacionarna točka in zato velja $\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Odtod sledi, da tokovnica $\phi_t(\mathbf{x})$ skozi poljubno točko $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in K$ ostane v K za vse vrednosti t na maksimalnem intervalu.

Sledi, da je maksimalni interval vsake tokovnice enak $\mathbb{R}$.

Grupa difeomorfizmov deluje tranzitivno

Posledica. Za vsako povezano domeno $D \subset \mathbb{R}^n$ deluje grupa $\text{Diff}(D)$ vseh gladih difeomorfizmov $D \rightarrow D$ tranzitivno na D , to je, poljubno točko $p \in D$ lahko preslikamo v poljubno drugo točko $q \in D$ z difeomorfizmom.

Ideja dokaza. Naj bosta $p, q \in D$ poljubni točki. Izberemo gladek vložen lok $\Gamma \subset D$ od p do q in ga parametriziramo z injektivno gladko preslikavo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma$, ki zadošča

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma(1) = q, \quad \dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \text{za vsak } t \in [0, 1].$$

Funkcija

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) := \gamma'(t), \quad t \in [0, 1]$$

je gladko vektorsko polje vzdolž loka Γ in γ je njegova tokovnica.

Z metodami gladke analize (particije enote) lahko $\mathbf{F}$ razširimo do gladkega vektorskega polja $\mathbf{F}$ s kompaktnim nosilcem na D .

Njegov tok $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \text{Diff}(D)$ je zato kompleten (ter miruje izven nosilca polja) in zadošča $\phi_1(p) = q$.

Naloga 1. Naj bo $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$, ki je konstantna na vsaki tokovnici vektorskega polja $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. (Taka funkcija u se imenuje prvi integral sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.) Označimo tok polja $\mathbf{F}$ s ϕ_t . Pokaži, da je tedaj preslikava

$$t \mapsto \phi_{h(\mathbf{x})t}(\mathbf{x})$$

tok polja $h(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})$. To vektorsko polje ima v vsaki točki isto smer kot $\mathbf{F}$, le njegova velikost je različna. Če je polje $\mathbf{F}$ kompletno, je tudi $h\mathbf{F}$ kompletno.

Naloga 2. Za vsako vektorsko polje $\mathbf{F}$ na $D \subset \mathbb{R}^n$ obstaja pozitivna gladka funkcija $h : D \rightarrow (0, +\infty)$, tako da je polje $h\mathbf{F}$ kompletno.

Ideja dokaza na $D = \mathbb{R}^n$: Označimo z $\mathbb{B}_r \subset \mathbb{R}^n$ kroglo polmera r s središčem v izhodišču. Funkcijo h izberemo tako, da je dovolj majhna na vsaki krogelni lupini $\mathbb{B}_{k+1} \setminus \mathbb{B}_k$, tako da vsaka tokovnica, ki prečka to lupino, potrebuje za prečenje vsaj čas 1. Torej nobena tokovnica polja $h\mathbf{F}$ ne more v končnem času do neskončnosti in je zato kompletna.

Spreminjanje volumna v toku

Zanimivo in pomembno je naslednje vprašanje. Fiksirajmo $t_0 \in \mathbb{R}$ in naj bo $\phi_t = \phi_{t,t_0}$ tok vektorskega polja $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$, lahko tudi neavtonomnega.

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omejena domena z robom, ki ima volumen nič, na kateri je tok ϕ_t definiran na nekem intervalu $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$. Zanima nas, kako se spreminja volumen potujoče domene $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$ s časom $t \in I$.

Naj bodo $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$. Potem je

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} du_1 du_2 \cdots du_n.$$

Označimo $\phi_t(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{u}) = (x_1(t, \mathbf{u}), \dots, x_n(t, \mathbf{u}))$. Tedaj je

$$\text{Vol}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{\Omega} J(t, \mathbf{u}) du_1 du_2 \cdots du_n,$$

kjer je

$$J(t, \mathbf{u}) = \frac{\partial(x_1(t, \mathbf{u}), \dots, x_n(t, \mathbf{u}))}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \det \left(\frac{\partial x_i(t, \mathbf{u})}{\partial u_j} \right)_{i,j=1, \dots, n}$$

Jacobijeva determinanta preslikave $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}(t, \mathbf{u}) = \phi_t(\mathbf{u})$ pri fiksnem t .

Divergenca vektorskega polja in Liouvilleova formula

Izrek. Jacobijeva determinanta $J(t, \mathbf{u})$ toka vektorskega polja $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$ zadošča Liouvilleovi formuli

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t, \mathbf{u}) = \text{div } \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{u})) \cdot J(t, \mathbf{u}),$$

kjer je

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

divergenca vektorskega polja $\mathbf{F}$. Odtod sledi

$$J(t, \mathbf{u}) = e^{\int_{t_0}^t \text{div } \mathbf{F}(s, \mathbf{x}(s, \mathbf{u})) ds}.$$

Če je $\text{div } \mathbf{F} = 0$, je $J(t, \mathbf{u}) = 1$ in tok polja $\mathbf{F}$ ohranja volumen.

Formula za $J(t, \mathbf{u})$ v izreku sledi z integracijo linearne homogene diferencialne enačbe v prvi vrstici, upošteva $\mathbf{x}(t_0, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}$ in zato $J(t_0, \mathbf{u}) \equiv 1$.

Izrek lahko zapišemo v naslednji ekvivalentni obliki.

Izrek. Naj bo $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$, $\phi_t = \phi_{t,t_0}$ tok polja $\mathbf{F}$, in $\Omega \subset D$ neka zaprta omejena domena z volumnom. Tedaj velja

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\phi_t(\Omega)) = \int_{\phi_t(\Omega)} \text{div } \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_n$$

za vse t , za katere je tok ϕ_t definiran na Ω (torej je $\phi_t(\Omega) \subset D$).

Dejansko, z odvajanjem po t pod integralom vidimo, da je leva stran enaka

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Omega_t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} J(t, \mathbf{u}) du_1 du_2 \cdots du_n = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} J(t, \mathbf{u}) du_1 du_2 \cdots du_n,$$

desna stran pa je po formuli za zamenjavo spremenljivk v integralu enaka

$$\int_{\phi_t(\Omega)} \text{div } \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{F}(t, \phi_t(\mathbf{u})) J(t, \mathbf{u}) du_1 \cdots du_n.$$

Dokaz Liouvilleove formule

Pri $n = 1$ je formula očitna. Zaradi preprostosti bomo napisali dokaz v primeru $n = 2$; ista ideja z več pisanja deluje v vsaki dimenziji.

Uvedimo oznake

$$(x_1, x_2) = (x, y), \quad (u_1, u_2) = (u, v), \quad \mathbf{F} = (f, g).$$

Tedaj je

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t, u, v) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}_u & \dot{x}_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ \dot{y}_u & \dot{y}_v \end{vmatrix}.$$

Z verižnim pravilom in upoštevanjem diferencialne enačbe dobimo

$$\begin{aligned} \dot{x}_u &= \frac{\partial}{\partial u} \dot{x} = \frac{\partial}{\partial u} f(t, x(t, u, v), y(t, u, v)) = f_x x_u + f_y y_u \\ \dot{x}_v &= \frac{\partial}{\partial v} \dot{x} = \frac{\partial}{\partial v} f(t, x(t, u, v), y(t, u, v)) = f_x x_v + f_y y_v \end{aligned}$$

in podobno

$$\dot{y}_u = g_x x_u + g_y y_u, \quad \dot{y}_v = g_x x_v + g_y y_v.$$

Vstavimo izraze za $\dot{x}_u$, $\dot{x}_v$ v prvo determinanto v izrazu za $\frac{\partial}{\partial t} J(t, u, v)$:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_u & \dot{x}_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_x x_u + f_y y_u & f_x x_v + f_y y_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = f_x \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} + f_y \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = f_x J.$$

Podobno, če vstavimo izraza za $\dot{y}_u$ in $\dot{y}_v$ v drugo determinanto v formuli za $\frac{\partial}{\partial t} J(t, u, v)$, dobimo

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ \dot{y}_u & \dot{y}_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ g_x x_u + g_y y_u & g_x x_v + g_y y_v \end{vmatrix} = g_y J.$$

Seštejemo in dobimo Liouvilleovo formulo

$$\frac{\partial}{\partial t} J = (f_x + g_y) J = \text{div } \mathbf{F} \cdot J.$$

Primer. Naj bo $\rho(x, y)$ gladka funkcija. Hamiltonovo polje $\mathbf{H}_\rho = (-\rho_y, \rho_x)$ zadošča

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_\rho = -\rho_{yx} + \rho_{xy} = 0,$$

torej njegov tok ohranja ploščino.

Analogno velja za Hamiltonova polja na domenah v $\mathbb{R}^{2n}$ za poljuben $n \in \mathbb{N}$.

Primer. Naj bo $u(x_1, \dots, x_n)$ gladka funkcija. Njen gradient ima divergenco

$$\operatorname{div} \nabla u = \operatorname{div} (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = \sum_{k=1}^n u_{x_k x_k} = \Delta u,$$

torej Laplaceov operator. Po Liouvilleovem izreku tok gradienta ∇u :

- ohranja volumen, če je u *harmonična funkcija* ($\Delta u = 0$);
- povečuje volumen (ekspanziven tok), če je u *subharmonična funkcija* ($\Delta u \geq 0$);
- zmanjšuje volumen, če je u *superharmonična funkcija* ($\Delta u \leq 0$).

III. Poglavje: Sistemi linearnih diferencialnih enačb

V tretjem poglavju predmeta bomo obravnavali sisteme linearnih diferencialnih enačb ter linearne enačbe višjega reda.

V tem predavanju si bomo ogledali naslednje teme.

- (1) Obstoj globalnih rešitev linearnih sistemov
- (2) Liouvilleova formula za linearen sistem
- (3) Homogeni sistemi, fundamentalna rešitev
- (4) Rešitve nehomogenih sistemov

Splošni pojmi

Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ interval, poltrak, ali $I = \mathbb{R}$. Označimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T && \text{vektorji v } \mathbb{R}^n \quad (^T \text{ pomeni transponiranje}) \\ A(t) &= (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n && \text{zvezna matrična } n \times n \text{ funkcija na } I \\ \mathbf{f}(t) &= (f_i(t))_{i=1}^n && \text{zvezna vektorska funkcija na } I.\end{aligned}$$

Neavtonomen, nehomogen sistem linearnih diferencialnih enačb:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad t \in I.$$

Prerejen homogen sistem:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad t \in I.$$

Začetni problem:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \text{ za nek } t_0 \in I \text{ in } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Eksistenčni izrek za sisteme linearnih enačb

Izrek. Naj bo $A(t)$ zvezna matrična funkcija dimenzije $n \times n$ na intervalu $t \in I \subset \mathbb{R}$ (pri čemer je I lahko tudi poltrak ali $\mathbb{R}$) in naj bo $\mathbf{f}(t)$ zvezna funkcija na I z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$. Potem ima za vsak $t_0 \in I$ in $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

natanko eno rešitev $\mathbf{x}(t)$ na $t \in I$.

Vsaka rešitev torej obstaja na največjem časovnem intervalu, na katerem so podatki (funkciji $A(t)$ in $\mathbf{f}(t)$) zvezni.

Dokaz Naj bo $I = (\alpha, \omega)$, $-\infty \leq \alpha < t_0 < \omega \leq +\infty$. Iz eksistenčnega izreka vemo, da obstaja natanko ena rešitev problema $\mathbf{x}(t)$ na nekem maksimalnem intervalu $t \in J = (a, b) \subset I$. V kolikor $J \neq I$, velja ena od naslednjih možnosti (glej trditev o maksimalnih intervalih v 8. predavanju):

- $b < \omega$ in $\lim_{t \nearrow b} |\mathbf{x}(t)| = +\infty$.
- $a > \alpha$ in $\lim_{t \searrow a} |\mathbf{x}(t)| = +\infty$.

Dokaz

Denimo, da velja prva možnost. Z integracijo dobimo za vsak $t \in [t_0, b]$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t (A(s)\mathbf{x}(s) + \mathbf{f}(s))ds$$

in od tod

$$|\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{x}_0| + \int_{t_0}^b |\mathbf{f}(s)|ds + \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot |\mathbf{x}(s)|ds.$$

Iz Gronwallove leme sledi

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \left(|\mathbf{x}_0| + \int_{t_0}^b |\mathbf{f}(s)|ds \right) e^{\int_{t_0}^b \|A(s)\|ds},$$

za vsak $t_0 \leq t < b$. Torej je funkcija $\mathbf{x}(t)$ omejena v desnem krajišču $t = b$, kar je v protislovju s predpostavko. Torej je $b = \omega$.

Analogen dokaz pokaže, da spodna meja a ne more biti večja od α .

Rešitve homogenega sistema

Trditev. Množica vseh rešitev homogenega linearnega sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad t \in I, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

je n -razsežen vektorski podprostor prostora $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ zvezno odvedljivih funkcij $I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dokaz Če sta $\mathbf{x}(t)$ in $\mathbf{y}(t)$ dve rešitvi in $a, b \in \mathbb{R}$, potem je

$$\frac{d}{dt}(a\mathbf{x}(t) + b\mathbf{y}(t)) = a\dot{\mathbf{x}}(t) + b\dot{\mathbf{y}}(t) = aA(t)\mathbf{x}(t) + bA(t)\mathbf{y}(t) = A(t)(a\mathbf{x}(t) + b\mathbf{y}(t)).$$

Torej je $a\mathbf{x}(t) + b\mathbf{y}(t)$ spet rešitev enačbe. Zato je množica vseh rešitev

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$$

vektorski podprostor prostora $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Preslikava $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ je očitno linearna. Po eksistenčnem je izreku je tudi bijektivna, zato je linearni izomorfizem in $\dim \mathcal{A} = n$.

Fundamentalna rešitev homogenega linearnega sistema $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$

Označimo z

$$\mathbf{e}^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad k = 1, \dots, n$$

standardno bazo prostora $\mathbb{R}^n$. (Število 1 stoji v $\mathbf{e}^k$ na k -tem mestu.)

Fiksirajmo $t_0 \in I$. Za vsak $k = 1, \dots, n$ naj bo vektorska funkcija

$$\mathbf{x}^k(t) = (x_1^k(t), \dots, x_n^k(t))^T$$

rešitev začetnega problema

$$\dot{\mathbf{x}}^k(t) = A(t)\mathbf{x}^k(t), \quad \mathbf{x}^k(t_0) = \mathbf{e}^k.$$

Matrična $n \times n$ funkcija $X(t) = (\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t))$ tedaj zadošča enačbi

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = I$$

kjer je I identična matrika dimenzije n .

Funkcija $X(t)$ se imenuje *fundamentalna rešitev* dane enačbe, normalizirana pri $t = t_0$.

Izražanje toka s fundamentalno rešitvijo

Naj bo

$$\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T = \sum_{j=1}^n x_j^0 \mathbf{e}^j \in \mathbb{R}^n$$

poljuben vektor v $\mathbb{R}^n$. Tedaj je funkcija

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{x}^0$$

(produkt matrike $X(t)$ in vektorja $\mathbf{x}^0$) rešitev začetnega problema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0.$$

Dejansko:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{X}(t)\mathbf{x}^0 = A(t)X(t)\mathbf{x}^0 = A(t)\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = X(t_0)\mathbf{x}^0 = I \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0.$$

Torej je tok $\phi_t = \phi_{t,t_0}$ linearnega vektorskega polja $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x}$ enak

$$\phi_t(\mathbf{x}) = X(t)\mathbf{x}.$$

Tok enačbe $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ sestoji iz linearnih izomorfizmov

Iz splošnih lastnosti toka vemo, da je za vsak fiksen t preslikava $\phi_t = \phi_{t,t_0}$ difeomorfizem domene na svojo sliko.

V danem primeru je domena ves prostor $\mathbb{R}^n$ in preslikava ϕ_t je linearna,

$$\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_t(\mathbf{x}) = X(t)\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Zato je ϕ_t linearni izomorfizem na $\mathbb{R}^n$. To pomeni $\det X(t) \neq 0$.

Ker je determinanta zvezna v t in je $\det X(t_0) = \det I = 1$, sledi

$$\det X(t) > 0 \quad \text{za vsak } t \in I.$$

EksPLICITNO formulo za $\det X(t)$ dobimo iz Liouvillove formule.

Najprej opazimo, da je $X(t)$ ravno Jacobijeva matrika linearne preslikave $\mathbf{x} \mapsto X(t)\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{x})$, zato je

$$J(\phi_t) = \det X(t), \quad t \in I.$$

Liouvilleova formula za tok linearne sistema

Po Liouvilleovi formuli velja

$$\det X(t) = J(\phi_t) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{div} \mathbf{F}(s, \mathbf{x}) ds}.$$

Naj bo $A(t) = (a_{ij}(t))$. Vektorsko polje $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} = (F_1, \dots, F_n)$ ima divergenco

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t) = \operatorname{sled} A(t).$$

Sledi:

$$\det X(t) = J(\phi_t) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{sled} A(s) ds}.$$

Za omejeno domeno $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ z volumnom torej velja

$$\frac{d}{dt}\text{Vol}(\phi_t(\Omega)) = \int_{\phi_t(\Omega)} \text{sled } A(t) dV = \int_{\Omega} \text{sled } A(t) \cdot \det X(t) dV.$$

Tok ϕ_t ohranja volumen natanko tedaj, ko je sled $A(t) = 0$ za vsak $t \in I$.

Druge fundamentalne rešitve linearnega sistema

Pogosto se pri diskusiji linearnega homogenega sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad t \in I$$

vsaka neizrojena matrična funkcija $X(t)$ dimenzije $n \times n$, ki zadošča matrični enačbi

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

imenuje fundamentalna rešitev.

Za vsak fiksen $t_0 \in \mathbb{R}$ in $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ je potem funkcija

$$\mathbf{x}(t) = X(t)X(t_0)^{-1}\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

rešitev začetnega problema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0.$$

Poljubni dve fundamentalni rešitvi $X(t)$ in $Y(t)$ se torej razlikujeta le za produkt z neko neizrojeno konstantno matriko C :

$$Y(t) = X(t)C.$$

Kako pa linearen sistem zares rešimo?

Do sedaj smo razvili osnovno splošno teorijo za linearen sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}.$$

Pojavi se vprašanje, *ali lahko tak sistem eksplicitno rešimo z integracijo.*

Na žalost je odgovor negativen za $n > 1$, razen v posebnih primerih.

Najpomembnejši tak primer je sistem s konstantno matriko A (neodvisno od t):

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

oziroma

[illegible]

Take sisteme si bomo ogledali v naslednjih predavanjih.

Nehomogeni sistemi

Pred tem pa si oglejmo, kako rešimo nehomogen sistem, če poznamo fundamentalno rešitev pripadajočega homogenega sistema. Tu lahko uporabimo metodo *variacije konstante*, ki jo že poznamo iz primera $n = 1$.

Izrek. Naj bo $\Phi(t)^{n \times n}$ fundamentalna rešitev homogene enačbe

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = I.$$

Potem je za vsak $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ funkcija

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds \right) = \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t) \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds$$

rešitev nehomogenega začetnega problema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Dokaz

Naj bo

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds \right).$$

Tedaj je

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\Phi}(t) \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds \right) + \Phi(t) \Phi(t)^{-1} \mathbf{f}(t) \\ &= A(t) \Phi(t) \left(\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds \right) + \mathbf{f}(t) \\ &= A(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0)\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0.$$

Vsebina 10. predavanja

V tem predavanju obravnavamo eksplisitne rešitve sistemov homogenih linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

oziroma

[illegible]

Obravnavamo tudi vse možne primere linearnih dinamičnih sistemov na ravnini, lastnosti toka in fazni portret v odvisnosti od Jordanove forme matrike sistema, še posebej od njenih lastnih vrednosti.

Spoznamo pojem stabilnega, nestabilnega in centralnega podprostora sistema.

Norme matrik

V dokazih bomo uporabljali katerokoli od t.i. *naravnih norm* $\|A\|$ kvadratnih matrik $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, za katere velja:

- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,
- $|A\mathbf{x}| \leq \|A\| \cdot |\mathbf{x}|$ za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dva naravna kandidata sta *Evklidska norma*

$$\|A\|_e^2 = \sum_{i,j=1}^n (a_{i,j})^2$$

in *operatorska norma*

$$\|A\|_{op} = \sup\{|A\mathbf{x}| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, |\mathbf{x}| = 1\}.$$

Z uporabo Cauchy-Schwarzove neenakosti ni težko videti, da za vsak $i, j = 1, \dots, n$ velja

$$|a_{i,j}| \leq \|A\|_{op} \leq \|A\|_e \leq \sqrt{n} \|A\|_{op}.$$

Konvergenca matričnih vrst

Odtod sledi naslednja trditev za katerokoli od zgornjih dveh norm.

Trditev. Če matrična vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ konvergira absolutno, torej vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\| < +\infty$ konvergira, potem vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ konvergira po komponentah.

Podobno lahko dobimo izreke o členskem odvajanju in integriranju matričnih funkcijskih vrst. Odvod matrične funkcije $A(t) = (a_{i,j}(t))$ je definiran po komponentah: $\dot{A}(t) = (\dot{a}_{i,j}(t))$. Potrebovali bomo naslednjo trditev.

Trditev. Denimo, da matrična potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ konvergira na $|t| < r$. Potem na tem intervalu (ali krogu, če je t kompleksna spremenljivka) velja

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k t^{k-1}.$$

Izrek. Naj bo A konstantna $n \times n$ matrika. Začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

ima rešitev

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) \mathbf{x}_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Matrična funkcija $\Phi(t) = e^{tA}$ je fundamentalna rešitev sistema.

Dokaz Matrična eksponentna vrsta za $\Phi(t) = e^{tA}$ konvergira za vsak $t \in \mathbb{R}$, kar vidimo iz

$$\|\Phi(t)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k = e^{|t| \cdot \|A\|} < \infty.$$

Očitno je $\Phi(0) = 0$. Člensko odvajanje vrste za $\Phi(t)$ nam da

$$\dot{\Phi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} A^k = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} = A \Phi(t).$$

Razvoj matričnega binoma

Naloga Pokaži s primerom, da *enačba*

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

v splošnem ne velja za kvadratni matriki A, B dimenzije $n > 1$.

Enačba pa velja v primeru, ko matriki komutirata, $AB = BA$. V posebnem torej velja

$$e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA} = e^{tA} e^{sA}.$$

Navodilo: Uporabi Cauchyjev produkt vrst kot v primeru, ko sta A in B števili. Bistveno je, da za vsak par komutirajočih matrik A in B velja binomska formula

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Če A in B ne komutirata, ta formula v splošnem ne velja.

Rešitev nehomogene enačbe

Partikularna rešitev nehomogenega sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

s konstantno matriko A dobimo s formulo

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{f}(s) ds.$$

Splošna formula za partikularno rešitev je namreč

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s) ds,$$

kjer je $\Phi(t)$ fundamentalna rešitev

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I.$$

V primeru konstantne matrike A je $\Phi(t) = e^{tA}$ in

$$\Phi(t)\Phi(s)^{-1} = e^{(t-s)A}.$$

Sistemi z diagonalno matriko

Oglejmo si najpreprostejši primer, ko je matrika A diagonalna:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Števila λ_i so njene lastne vrednosti. Pripadajoči sistem

$$\dot{x}_k = \lambda_k x_k, \quad k = 1, \dots, n$$

sestoji iz n med seboj neodvisnih enačb. V tem primeru je

$$A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k), \quad \Phi(t) = e^{tA} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

Za vsak vektor $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ je funkcija

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c} = (c_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, c_n e^{\lambda_n t})$$

rešitev problema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$.

Uporaba Jordanove normalne forme

Vsaka $n \times n$ matrika je konjugirana neki Jordanovi matriki J ,

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1},$$

kjer je P obrnljiva matrika (v splošnem kompleksna) in je

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix} = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad \text{Jordanov blok}$$

Opomba: Lastna vrednosti λ_i in matrika P so lahko kompleksne!

Uporaba Jordanove normalne forme

Naj bo

$$A = PJP^{-1}.$$

Tedaj je

$$A^2 = (PJP^{-1})^2 = PJP^{-1} \cdot PJP^{-1} = PJ^2P^{-1}.$$

Z indukcijo dobimo

$$A^k = PJ^kP^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Odtod dobimo fundamentalno rešitev

$$\Phi(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} PJ^kP^{-1} = P e^{tJ} P^{-1}.$$

Z uvedbo nove spremenljivke

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$$

spremenimo sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = PJP^{-1}\mathbf{x}$ v

$$P\dot{\mathbf{y}} = PJ\mathbf{y} \iff \dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y}.$$

Torej zadošča obravnavati sisteme z Jordanovo matriko.

Redukcija na Jordanove kletke

Nadalje imamo

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$$

kjer so J_i Jordanove kletke. Potem je

$$e^{tJ} = \text{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_m}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Naj bo sedaj J Jordanova kletka dimenzije n z lastno vrednostjo λ :

$$J = \lambda I + N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potenca N^k matrike N ima enice na k -ti naddiagonali in ničle drugje; za $k \geq n$ je $N^k = 0$. Pravimo, da je matrika N *nilpotentna*.

Sistem z Jordanovo kletko

Odtod dobimo

$$\begin{aligned} e^{tN} &= I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ker je

$$J = \lambda I + N$$

in matriki λI in N komutirata, sledi

$$\Phi(t) = e^{tJ} = e^{t(\lambda I + N)} = e^{t\lambda I} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN}.$$

S tem smo našli eksplicitno fundamentalno rešitev (v splošnem kompleksno) za poljuben sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ s konstantno matriko A .

Uporaba lastnih in korenskih vektorjev

V praksi je pogosto ugodneje, če direktno uporabimo lastne in korenske vektorje matrike A . Naj bo $\mathbf{v}$ lastni vektor z lastno vrednostjo λ . Tedaj je funkcija

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = A\mathbf{x}(t)$$

rešitev sistema z začetno vrednostjo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$.

Če je $\lambda = a + ib$ kompleksno število in $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ pripadajoči kompleksni lastni vektor, je

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{(a+ib)t} (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2) = e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)) (\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2).$$

Ker je A realna, je tudi $\bar{\lambda} = a - ib$ lastna vrednost A z lastnim vektorjem $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$ in pripadajoča lastna funkcija je

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = e^{\bar{\lambda}t} \bar{\mathbf{v}} = e^{(a-ib)t} (\mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2).$$

Ti dve kompleksni rešitvi lahko nadomestimo s parom realnih rešitev

$$\begin{aligned}\Re \mathbf{x}(t) &= e^{at} (\cos(bt) \mathbf{v}_1 - \sin(bt) \mathbf{v}_2), \\ \Im \mathbf{x}(t) &= e^{at} (\sin(bt) \mathbf{v}_1 + \cos(bt) \mathbf{v}_2).\end{aligned}$$

Rešitve v lastnih smereh matrike. Če ima $\mathbb{R}^n$ bazo $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lastnih vektorjev matrike A z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, je splošna rešitev enaka

$$\mathbf{x}(t, c_1, \dots, c_n) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j$$

za poljubne konstante $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. To ustreza primeru, ko je matrika A diagonalizabilna.

Skoraj vsaka matrika je diagonalizabilna. V posebnem je taka vsaka simetrična matrika in vse njene lastne vrednosti so realne.

Morebitne kompleksne rešitve (v primeru kompleksnih lastnih vrednosti) lahko nadomestimo z realnimi rešitvami, tako da vzamemo njihove realne in imaginarne komponente.

Rešitve na korenskem podprostoru. Oglejmo si še primer, ko je λ lastna vrednost z lastnim vektorjem $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ in pripadajočimi korenskimi vektorji $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$:

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1, \quad \dots, \quad A\mathbf{v}_k = \lambda\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{k-1}.$$

V tej bazi podprostora $E = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ je A predstavljena z Jordanovo kletko. Pripadajoče rešitve so

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{\lambda t} (\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1) \\ \mathbf{x}_3(t) &= e^{\lambda t} \left(\mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2 + \frac{t^2}{2} \mathbf{v}_1 \right) \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{x}_k(t) &= e^{\lambda t} \left(\mathbf{v}_k + t\mathbf{v}_{k-1} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \mathbf{v}_1 \right)\end{aligned}$$

V primeru kompleksne lastne vrednosti λ dobimo tudi ustrezne konjugirano-kompleksne rešitve in jih nadomestimo z njihovimi realnimi in imaginarnimi komponentami.

Preverimo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_j(t) &= e^{\lambda t} \left(\mathbf{v}_j + t\mathbf{v}_{j-1} + \frac{t^2}{2}\mathbf{v}_{j-2} + \cdots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\mathbf{v}_1 \right) \\
 \dot{\mathbf{x}}_j(t) &= e^{\lambda t} \left(\lambda \left(\mathbf{v}_j + t\mathbf{v}_{j-1} + \frac{t^2}{2}\mathbf{v}_{j-2} + \cdots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\mathbf{v}_1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{v}_{j-1} + t\mathbf{v}_{j-2} + \cdots + \frac{t^{j-2}}{(j-2)!}\mathbf{v}_1 \right) \\
 A\mathbf{x}_j(t) &= e^{\lambda t} \left((\lambda\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j-1}) + t(\lambda\mathbf{v}_{j-1} + \mathbf{v}_{j-2}) + \frac{t^2}{2}(\lambda\mathbf{v}_{j-2} + \mathbf{v}_3) + \right. \\
 &\quad \left. \cdots + \frac{t^{j-2}}{(j-2)!}(\lambda\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\lambda\mathbf{v}_1 \right)
 \end{aligned}$$

Če člene v vsoti za $\dot{\mathbf{x}}(t)$ preuredimo po potencah spremenljivke t , dobimo člene v vsoti za $A\mathbf{x}_j(t)$. Zato je $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}_j(t)$.

Stabilni, nestabilni in centralni podprostor Glede na lastne vrednosti in pripadajoče lastne ter korenske podprostore matrike A je prostor $\mathbb{R}^n$ direktna vsota vektorskih podprostorov

$$\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_n \oplus E_c,$$

ki so definirani takole:

- (a) **Stabilni podprostor** E_s je (direktna) vsota lastnih in korenskih podprostorov matrike A , ki pripadajo lastnim vrednostim λ z negativnim realnim delom $\Re\lambda < 0$. Rešitve na tem podprostoru se eksponentno približujejo izhodišču, ko $t \rightarrow +\infty$.
- (b) **Nestabilni podprostor** E_n je (direktna) vsota lastnih in korenskih podprostorov matrike A , ki pripadajo lastnim vrednostim λ s pozitivnim realnim delom $\Re\lambda > 0$. Rešitve na tem podprostoru se eksponentno oddaljujejo od izhodišča, ko $t \rightarrow +\infty$.
- (c) **Centralni podprostor** E_c je (direktna) vsota lastnih in korenskih podprostorov matrike A , ki pripadajo lastnim vrednostim λ z realnim delom $\Re\lambda = 0$. Rešitve na tem podprostoru so polinomske funkcije t .

Homogeni linearni sistemi na ravnini $\mathbb{R}^2$ Ogledali si bomo vse možne primere obnašanja linearnih sistemov s konstantno matriko na ravnini $\mathbb{R}^2$.

Naj bo A realna 2×2 matrika. Za njeno Jordanovo normalno formo J so možni naslednji trije primeri.

- (1) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$
- (2) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$
- (3) $J = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0.$

Oglejmo si rešitve linearnega sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x}$$

v vseh treh primerih. Pri študiju kvalitativnega obnašanja rešitev moramo ločevati podprimere glede na predznake lastnih vrednosti, oziroma predznak realnega dela $a = \Re \lambda$ v primeru kompleksne lastne vrednosti.

Primer 1: diagonalna matrika, realni lastni vrednosti. Naj bo

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Rešitve problema $\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x}$ so

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Zadošča obravnavati rešitve v zaprtem prvem kvadrantu $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$; njihove zrcalne slike preko obeh koordinatnih osi so prav tako tokovnice.

Primer 1A: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Označimo $\mu = \lambda_2/\lambda_1 > 0$. Tedaj je

$$|x_1(t)|^{-\mu} x_2(t) = |c_1|^{-\mu} c_2 e^{(-\mu\lambda_1 + \lambda_2)t} = |c_1|^{-\mu} c_2.$$

Funkcija $u(x_1, x_2) = |x_1|^{-\mu} x_2$ je prvi integral sistema in tokovnice so grafi

$$x_2 = c |x_1|^\mu, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Prav tako sta tokovnici oba poltraka vsake od koordinatnih osi.

Izhodišče $(0, 0)$ je odbojna negibna točka. Pri $t \rightarrow +\infty$ se vsaka točka $(x_1(t), x_2(t))$ z začetno pozicijo $(x_1(0), x_2(0)) \neq (0, 0)$ oddaljuje proti ∞ , pri $t \rightarrow -\infty$ pa se približuje $(0, 0)$. Vsa ravnina je *nestabilni prostor*, $E_n = \mathbb{R}^2$.

Primer 1B: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Ta primer ima isti fazni portret kot primer 1A, le da je smer toka na vsaki tokovnici obrnjena. Izhodišče $(0, 0)$ je sedaj privlačna negibna točka toka. Pri $t \rightarrow +\infty$ gre točka $(x_1(t), x_2(t))$ s poljubno začetno pozicijo proti $(0, 0)$. Vsa ravnina je *stabilni prostor*, $E_s = \mathbb{R}^2$.

Primer 1C: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Označimo $\mu = -\lambda_2/\lambda_1 > 0$. Kot prej vidimo, da je funkcija $u(x_1, x_2) = |x_1|^\mu x_2$ prvi integral sistema. Tokovnice so hiperbole

$$|x_1|^\mu x_2 = konst., \quad \mu = -\lambda_2/\lambda_1 > 0.$$

Na desni polravnini $x_1 > 0$ se tok na vsaki tokovnici pomika na desno, na levi polravnini pa na levo. Za vsako začetno pozicijo z $x_1(0) \neq 0$ gre prva koordinata $x_1(t)$ proti $\pm\infty$, odvisno od znaka $x_1(0)$. Druga koordinata $x_2(t)$ gre vselej proti 0, ko $t \rightarrow +\infty$.

Koordinatna x_2 -os je *stabilni podprostor* sistema, $E_s = \{x_1 = 0\}$, saj je invarianten za tok in se le-ta približuje izhodišču, ko gre $t \rightarrow +\infty$.

Koordinatna x_1 -os pa je *nestabilni podprostor* sistema, $E_n = \{x_2 = 0\}$, saj je invariantna za tok in le-ta se na njej približuje izhodišču, ko gre $t \rightarrow -\infty$.

Sistem z nasprotno predznačenimi lastnima vrednostima (ena pozitivna in druga negativna) se imenuje *hiperboličen*.

Primer 1D: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$. Sistem je

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = 0.$$

Tok je

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = c_2.$$

Tokovnice so desne in leve polovice premic $x_2 = c$ (prekinjene so pri $x_1 = 0$, torej na x_2 -osi). V tem primeru je x_2 -os *centralni podprostor*,

$$E_c = \{x_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Tok na njej miruje.

Če je $\lambda_1 > 0$, potem se vsaka tokovnica izven x_2 -osi ($c_1 \neq 0$) oddaljuje v $\pm\infty$, ko $t \rightarrow +\infty$, ter se približuje x_2 -osi, ko $t \rightarrow -\infty$. Tedaj je

$$E_n = \{x_2 = 0\} = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Pri $\lambda_1 < 0$ dobimo ravno obratno sliko in je $E_s = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Primer 1E: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. V tem primeru tok miruje, vsaka tokovnica je točka. Centralni podprostor je celotna ravnina, $E_c = \mathbb{R}^2$.

Primer 2: Jordanova kletka. Jordanova matrika

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ustreza sistemu

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2.$$

Formulo za rešitev z začetnim pogojem (c_1, c_2) že poznamo:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Konstruktivno (brez uporabe formule) jo najdemo tako, da najprej rešimo drugo enačbo, ki je neodvisna od x_1 , dobimo $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$, nato pa to funkcijo vstavimo v prvo enačbo in dobimo nehomogeno linearno enačbo za $x_1(t)$:

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1(t) + c_2 e^{\lambda t}.$$

Rešitev najdemo z nastavkom $x_1(t) = C(t)e^{\lambda t}$ (variacija konstante).

Primer 2A: $\lambda = 0$. Tokovnice so premice

$$x_1(t) = c_1 + c_2 t, \quad x_2(t) = c_2.$$

Na x_1 -osi tok miruje. Pri vrednosti $x_2(t) = c_2 > 0$ se točka pomika na desno s hitrostjo c_2 , pri $c_2 < 0$ pa se pomika na levo s hitrostjo $|c_2| = -c_2$. Vsa ravnina je centralni podprostor, $E_c = \mathbb{R}^2$, saj sta obe lastni vrednosti matrike enaki 0.

Primer 2B: $\lambda < 0$. Sedaj je pri $t \rightarrow \pm\infty$ dominanten člen $e^{\lambda t}$. Vse tokovnice gredo proti $(0, 0)$ pri $t \rightarrow +\infty$. Izhodišče $(0, 0)$ je torej privlačna točka in stabilni podprostor je $E_s = \mathbb{R}^2$. Pri $t \rightarrow -\infty$ pa se vse tokovnice izven $(0, 0)$ oddaljujejo v neskončnost.

Premica $x_2 = 0$ (x_1 -os) sestoji iz treh trajektorij (oba poltraka ter točka $(0, 0)$), torej je invariantna množica toka.

Za $c_2 \neq 0$ (začetna točka leži izven x_1 -osi) imamo

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{c_1}{c_2} + t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty.$$

Prva komponenta in njen odvod sta enaka

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t), \\ \dot{x}_1(t) &= e^{\lambda t}(\lambda(c_1 + c_2 t) + c_2) = e^{\lambda t}(\lambda c_1 + c_2 + \lambda c_2 t). \end{aligned}$$

Odtod vidimo, da vsaka trajektorija s $c_2 > 0$ vstopi v prvi kvadrant pri času $t_0 = -c_1/c_2$ in tam ostane za vse $t > t_0$, pri času

$$t_1 = -\frac{\lambda c_1 + c_2}{\lambda c_2} = t_0 - \frac{1}{\lambda} > t_0$$

obrne x_1 -smer in se pri $t \rightarrow +\infty$ asimptotično približuje x_1 -osi (ker je $x_1(t)/x_2(t) \rightarrow +\infty$) in točki $(0, 0)$ z desne. Nobena trajektorija na zgornji polravnini se ne približuje negativnemu delu x_1 -osi.

Za trajektorije na spodnji polravnini (začetni pogoj $c_2 < 0$) velja ravno nasprotno: pri velikih $t > 0$ je $x_1(t) < 0$, $\dot{x}_1(t) > 0$, zato se trajektorija asimptotično približuje x_1 -osi in točki $(0, 0)$ z leve. Nobena trajektorija na spodnji polravnini se ne približuje pozitivnemu delu x_1 -osi.

Primer 2C: $\lambda > 0$. Imamo podoben fazni portret in dinamiko kot v primeru 2B pri obratu časa $t \mapsto -t$. Izhodišče je sedaj odbojna točka in $E_n = \mathbb{R}^2$.

Primer 3: Kompleksna lastna vrednost. Sedaj je

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \lambda = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$$

Ta matrika je konjugirana realni matriki

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Če označimo koordinate na ravnini z (x, y) in uvedemo kompleksno spremenljivko

$$z = x + iy \in \mathbb{C},$$

lahko prirejeni sistem diferencialnih enačb za x in y :

$$\dot{x} = ax - by, \quad \dot{y} = bx + ay$$

zapišemo v kompleksni obliki

$$\dot{z} = \lambda z.$$

Njena rešitev z začetnim pogojem $z(0) = z_0 = c_0 + ic_1$ je

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\lambda t} z_0 \\ &= e^{at+ibt}(c_0 + ic_1) \\ &= e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))(c_0 + ic_1) \\ &= e^{at}(\cos(bt)c_0 - \sin(bt)c_1 + i(\sin(bt)c_0 + \cos(bt)c_1)). \end{aligned}$$

V realnem zapisu in upoštevaje $z(t) = x(t) + iy(t)$ dobimo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = e^{at} R(bt) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Matrika

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

predstavlja rotacijo na $\mathbb{R}^2$ za kot t v pozitivni (levi) smeri.

Dinamika sistema s kompleksno lastno vrednostjo. Sedaj lahko opišemo dinamiko rešitev in fazni portret sistema.

Primer 3A: $a = \Re \lambda = 0$.

Tokovnice so krožnice s središčem v izhodišču, na katerih tok kroži s kotno hitrostjo $|b|$ v pozitivni (levi) smeri, če je $b > 0$ in v negativni (desni) smeri, če je $b < 0$. Vsa ravnina je centralni podprostor: $E_c = \mathbb{R}^2$.

Primer 3B: $a < 0$.

Tokovnice so spirale, ki krožijo s kotno hitrostjo b in se hkrati približujejo izhodišču s faktorjem e^{at} . V tem primeru je $(0, 0)$ privlačna negibna točka in vsa ravnina je stabilni podprostor: $E_s = \mathbb{R}^2$.

Primer 3C: $a > 0$.

Tokovnice so spirale, ki krožijo s kotno hitrostjo b in se hkrati oddaljujejo od izhodišča s faktorjem e^{at} . V tem primeru je $(0, 0)$ odbojna negibna točka in vsa ravnina je nestabilni podprostor: $E_n = \mathbb{R}^2$.

Vsebina 11. predavanja

V tem predavanju obravnavamo linearne diferencialne enačbe višjega reda:

$$Lx := a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = b(t),$$

kjer je $n > 1$ in so koeficienti $a_j(t)$ in desna stran $b(t)$ zvezne funkcije na nekem intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Tak operator

$$L : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}(I), \quad x \mapsto Lx$$

se imenuje *linearni diferencialni operator n -tega reda*.

Če so funkcije $a_j(t)$ in $b(t)$ razreda $\mathcal{C}^r(I)$, potem L definira preslikavo

$$L : \mathcal{C}^{r+n}(I) \rightarrow \mathcal{C}^r(I), \quad x \mapsto Lx.$$

V primeru $b \equiv 0$ je $Lx = 0$ *homogena linearna diferencialna enačba n -tega reda*.

Posebna pozornost bo namenjena primeru, ko so koeficienti a_j konstante.

Regularne točke, motivacija. Točka $t \in I$, v kateri je vodilni koeficient $a_0(t) = 0$ enak nič, se imenuje *singularna točka operatorja*. Obravnava v okolici take točke je praviloma

zahtevnejša. Primera sta npr.

$$\begin{aligned} t^2 \ddot{x} + a_1 t \dot{x} + a_0 x &= 0 && \text{Eulerjeva enačba} \\ t^2 \ddot{x} + t \dot{x} + (t^2 - \nu^2)x &= 0 && \text{Besselova enačba} \end{aligned}$$

Obravnavali bomo predvsem regularne operatorje, pri katerih je $a_0(t) \neq 0$ za vse $t \in I$. Po deljenju z $a_0(t)$ imamo torej operator oblike

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x.$$

Še posebej pomembne so enačbe drugega reda, ki se naravno pojavijo pri obravnavi fizikalnih parcialnih diferencialnih enačb 2. reda.

Na primer, *valovna enačba* sprašuje po funkcijah $u(t, x)$, ki zadoščajo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (\text{ali } u_{tt} = c^2 \Delta u, \text{ če je } x \in \mathbb{R}^n).$$

Taka funkcija $u(t, x)$ opisuje odmik delca v prostoru (spremenljivka x) od začetne lege v odvisnosti od časa t , pri čemer konstanta $c > 0$ predstavlja hitrost potovanja valov skozi prostor.

Motivacija. Najpreprostejše rešitve valovne enačbe iščemo v obliki produkta

$$u(t, x) = T(t)X(x).$$

Če vstavimo v enačbo $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, dobimo

$$\ddot{T}(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) \iff \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Sklep je, da morata biti oba izraza na desni strani konstantna. Če to skupno konstanto označimo z $-\lambda$, dobimo dve navadni diferencialni enačbi drugega reda za X in T :

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad \ddot{T}(t) + c^2 \lambda T(t) = 0.$$

S tem dobimo t.i. *stacionarne* ali *razcepne* rešitve valovne enačbe. Izkaže se, da lahko splošno rešitev poiščemo kot linearno kombinacijo (superpozicijo) razcepnih rešitev. V splošnem je potrebno neskončno členov, torej vrsta. To si bomo ogledali v naslednjem predavanju.

Podobno se da reševati vrsto drugih enačb matematične fizike, ki se obravnavajo pri predmetu Analiza 4.

Prevedba na sistem linearnih enačb prvega reda. Z uvedbo spremenljivk

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \ddot{x}, \quad \dots, \quad x_n = x^{(n-1)}$$

prevedemo enačbo $Lx = b$ na sistem n linearnih diferencialnih enačb 1. reda

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dots &\dots \dots \\ \dot{x}_n &= -(a_n(t)x_1 + a_{n-1}(t)x_2 + \dots + a_1(t)x_n) + b(t) \end{aligned}$$

z matriko

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

in nehomogenim členom $\mathbf{B}(t) = (0, 0, \dots, 0, b(t))^T$. Opazimo, da je

$$\text{sled } A(t) = -a_1(t).$$

Eksistenčni izrek za linearno enačbo višjega reda

Iz eksistenčnega izreka za sisteme linearnih enačb prvega reda sledi:

Izrek. Naj bo L regularen linearen diferencialni operator n -tega reda na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Vsak začetni problem

$$Lx = b(t), \quad x(t_0) = c_0, \dot{x}(t_0) = c_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

s $t_0 \in I$ in $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ ima natanko eno rešitev $x(t)$ na intervalu $t \in I$.

Ker je L linearen operator:

$$L(x + y) = L(x) + L(y), \quad L(cx) = cL(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

je množica rešitev homogene enačbe $Lx = 0$ (torej jedro ker L operatorja L) vektorski podprostor prostora $\mathcal{C}^n(I)$. Ker imamo v eksistenčnem izreku na voljo n prostih konstant $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$, je

$$\dim \ker L = n.$$

Fundamentalna rešitev in determinanta Wronskega

Naj bo $x_1(t), \dots, x_n(t)$ poljubna baza tega prostora. Potem je vsaka rešitev enačbe $Lx = 0$ oblike

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x_j(t)$$

za neke konstante $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Prirejena *fundamentalna rešitev* je

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \dot{x}_n \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \cdots & \ddot{x}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t).$$

Ker je sled $A(t) = -a_1(t)$, *determinanta Wronskega* $W(t) = \det \Phi(t)$ zadošča *Liouvilleovi enačbi*

$$\dot{W}(t) = -a_1(t)W(t), \quad W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds}.$$

Torej je $W(t) \neq 0$ za vse $t \in I$, čim je $W(t_0) \neq 0$ za nek $t_0 \in I$. Slednje dosežemo s primerno izbiro začetnih pogojev pri $t = t_0$.

Rešitev nehomogene enačbe. Če poznamo fundamentalno rešitev $\Phi(t)$ homogene enačbe

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = 0,$$

lahko rešimo tudi prirejeno nehomogeno enačbo

$$Lx = b(t)$$

za poljubno zvezno funkcijo $b(t)$. Sledeč metodi, opisani pri reševanju sistemov enačb, je partikularna rešitev nehomogenega sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)$$

enaka

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}\mathbf{B}(s)ds.$$

Dejansko, njen odvod po t je enak

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{\Phi}(t)\Phi(s)^{-1}\mathbf{B}(s)ds + \Phi(t)\Phi(t)^{-1}\mathbf{B}(t) &= \int_{t_0}^t A(t)\Phi(t)\Phi(s)^{-1}\mathbf{B}(s)ds + \mathbf{B}(t) \\ &= A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t). \end{aligned}$$

V našem primeru je

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T,$$

zato je partikularna rešitev $x(t)$ nehomogene enačbe $Lx = b$ enaka prvi komponenti vektorske funkcije

$$\int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}\mathbf{B}(s)ds.$$

(Naslednje komponente so njeni odvodi.) Iz $\mathbf{B}(s) = (0, 0, \dots, b(s))^T$ sledi, da je prva komponenta zgornjega integrala enaka

$$x(t) = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \Phi_{1,i}(t)\Phi_{i,n}^{-1}(s)b(s)ds = \sum_{i=1}^n x_i(t) \int_{t_0}^t \Phi_{i,n}^{-1}(s)b(s)ds,$$

kjer so $x_1(t), \dots, x_n(t)$ bazne rešitve homogene enačbe $Lx = 0$ (prva vrstica fundamentalne matrike $\Phi(t)$).

Homogene enačbe s konstantnimi koeficienti

Oglejmo si sedaj homogeno enačbo $Lx = 0$, kjer je

$$Lx = x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{x} + a_nx$$

linearni diferencialni operator reda n s konstantnimi koeficienti.

Rešitve iščemo z nastavkom $x(t) = e^{\lambda t}$. Očitno je

$$L(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n) = e^{\lambda t}P(\lambda).$$

Polinom $P(\lambda)$ se imenuje *karakteristični polinom* operatorja L . Če uvedemo oznako $D = \partial/\partial t$ in $D^k = \partial^k/\partial t^k$, lahko operator L zapišemo v obliki

$$L = P(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n.$$

Iz zgornje formule vidimo:

Funkcija $x(t) = e^{\lambda t}$ je rešitev homogene enačbe $Lx = 0$ natanko tedaj, ko je λ ničla karakterističnega polinoma P .

Ničle karakterističnega polinoma P se imenujejo *lastne vrednosti operatorja* L in sestavljajo njegov *spekter*

$$\text{spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Analiza možnih primerov

Primer 1: karakteristični polinom P ima različne realne ničle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Funkcije

$$x_j(t) = e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \dots, n$$

sestavljajo fundamentalni sistem rešitev, to je bazo prostora rešitev enačbe $Lx = 0$. Vsaka rešitev je oblike

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Primer 2: P ima različne ničle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ki so lahko kompleksne.

Če je $\lambda = a + ib$ kompleksna ničla, je tudi $\bar{\lambda} = a - ib$ ničla. Prirejena kompleksna rešitev

$$x(t) = e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))$$

določa par realnih rešitev

$$\Re x(t) = e^{at} \cos(bt), \quad \Im x(t) = e^{at} \sin(bt).$$

Na ta način dobimo fundamentalni sistem rešitev, ki ga določajo funkcije $e^{\lambda_j t}$ za realne ničle polinoma P ter funkcije zgornje oblike za kompleksne ničle.

Primer 3: Število λ je k -kratna ničla polinoma P . To pomeni, da $L = P(D)$ vsebuje faktor $(D - \lambda)^k$. Rešitve iščemo z nastavkom

$$x(t) = e^{\lambda t} q(t).$$

Ker je

$$(D - \lambda)(e^{\lambda t} q(t)) = \lambda e^{\lambda t} q(t) + e^{\lambda t} \dot{q}(t) - \lambda e^{\lambda t} q(t) = e^{\lambda t} \dot{q}(t),$$

sledi z indukcijo

$$(D - \lambda)^k (e^{\lambda t} q(t)) = e^{\lambda t} q^{(k)}(t).$$

Odtod vidimo, da je funkcija $x(t) = e^{\lambda t} q(t)$ rešitev enačbe $Lx = 0$, če je $q(t)$ polinom stopnje $< k$. Tako dobimo k linearno neodvisnih rešitev, ki pripadajo lastni vrednosti λ stopnje k karakterističnega polinoma:

$$x_1(t) = e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = t e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x_k(t) = t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

Če je $\lambda = a + ib$ kompleksna lastna vrednost večkratnosti k , je taka tudi $\bar{\lambda} = a - ib$. Zgornje kompleksne rešitve lahko nadomestimo z $2k$ realnimi:

$$u_j(t) = t^{j-1} e^{at} \cos(bt), \quad v_j(t) = t^{j-1} e^{at} \sin(bt), \quad j = 1, \dots, k.$$

Primer 1:

$$\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 0.$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3), \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Bazni rešitvi sta

$$x_1(t) = e^{2t}, \quad x_2(t) = e^{-3t}.$$

Splošna rešitev je $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

Primer 2:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 3x = 0.$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3, \quad \lambda_1 = 1 + i\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 - i\sqrt{2}.$$

Kompleksna rešitev je

$$z(t) = e^{(1+i\sqrt{2})t} = e^t (\cos(\sqrt{2}t) + i \sin(\sqrt{2}t)).$$

Bazni realni rešitvi sta

$$x_1(t) = e^t \cos(\sqrt{2}t), \quad x_2(t) = e^t \sin(\sqrt{2}t).$$

Primer 3:

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 4x = 0.$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Bazni rešitvi sta

$$x_1(t) = e^{2t}, \quad x_2(t) = t e^{2t}.$$

Splošna rešitev je

$$x(t) = e^{2t}(c_0 + c_1 t), \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Primer 4:

$$x^{(4)} + 2\ddot{x} + x = 0.$$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -i.$$

Bazne rešitve:

$$\cos t, \quad \sin t, \quad t \cos t, \quad t \sin t.$$

Reševanje nehomogene enačbe $Lx = f$. Oglejmo si sedaj nehomogeno enačbo

$$Lx = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = f(t).$$

V splošnem lahko rešitev najdemo sledeč formuli, ki smo si jo že ogledali.

Sedaj si oglejmo direktno metodo, ki nam da rešitve za linearne kombinacije funkcij oblike $t^k e^{\lambda t}$. Označimo s P karakteristični polinom:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Najprej se spomnimo, da je

$$L = P(D), \quad \text{kjer je } D = d/dt.$$

Za vsak $k \in \mathbb{N}$ označimo s $P^{(k)}(\lambda)$ k -ti odvod polinoma P po λ . Potem je

$$L^{(k)} := P^{(k)}(D)$$

diferencialni operator reda $n - k$ in ničelni operator za $k > n$.

Delovanje operatorja D^k na produkt $tq(t)$

Trditev. Če je $q(t)$ k -krat odvedljiva funkcija na $I \subset \mathbb{R}$, velja formula

$$D^k(tq(t)) = (tq(t))^{(k)} = tq^{(k)} + kq^{(k-1)} = tD^k(q) + kD^{k-1}(q).$$

Dokaz Uporabimo indukcijo. Trditev je trivialna za $k = 0$, pri čemer vzamemo $D^k = 0$ za $k < 0$. Denimo, da enačba velja za nek k . Tedaj

$$\begin{aligned} D^{k+1}(tq) &= D(D^k(tq)) = D(tD^k(q) + kD^{k-1}(q)) \\ &= tD^{k+1}(q) + D^k(q) + kD^k(q) \\ &= tD^{k+1}(q) + (k+1)D^k(q). \end{aligned}$$

Torej formula velja tudi za $k+1$ in trditev je dokazana.

Opomba: Formulo lahko zapišemo tudi v obliki

$$D^k(tq) = tD^k(q) + (D^k)'(q).$$

Dobljeno formulo poslošimo za poljuben linearen operator L s konstantnimi koeficienti. Spomnimo, da je $L = P(D)$ in $L' = P'(D)$.

Trditev. Če je $q(t)$ n -krat odvedljiva funkcija na $I \subset \mathbb{R}$ in je $L = P(D)$ linearen diferencialni operator reda n s konstantnimi koeficienti, velja formula

$$L(tq(t)) = tL(q) + L'(q).$$

Dokaz Naj bo $L = \sum_{j=0}^n a_j D^{n-j}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} L(tq) &= \sum_{j=0}^n a_j D^{n-j}(tq) \\ &= \sum_{j=0}^n a_j t D^{n-j}(q) + \sum_{j=0}^n a_j (n-j) D^{n-j-1}(q) \\ &= tL(q) + L'(q). \end{aligned}$$

Formula za $L(t^k q(t))$

Trditev. Če je $q(t)$ n -krat odvedljiva funkcija na $I \subset \mathbb{R}$ in je $L = P(D)$ linearen diferencialni operator reda n s konstantnimi koeficienti, velja za vsak $k \in \mathbb{N}$ formula

$$L(t^k q(t)) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} L^{(j)}(q), \quad L^{(j)} = P^{(j)}(D).$$

Dokaz Denimo, da formula velja za nek k in jo dokažimo za $k + 1$:

$$\begin{aligned} L(t^{k+1}q) &= tL(t^k q) + L'(t^k q) \\ &= t \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} L^{(j)}(q) + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} L^{(j+1)}(q) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k+1-j} L^{(j)}(q) + \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} t^{k+1-j} L^{(j)}(q). \end{aligned}$$

Upoštevaje identiteto $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$ dobimo iskano formulo.

Sedaj izberimo

$$q(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} L(e^{\lambda t}) &= P(\lambda)e^{\lambda t}, \\ L^{(j)}(e^{\lambda t}) &= P^{(j)}(\lambda)e^{\lambda t}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Odtod in iz prejšnje trditve dobimo naslednjo formulo.

Trditev. Če je $L = P(D)$ linearen diferencialni operator reda n s konstantnimi koeficienti, velja za vsak $k \in \mathbb{N}$ formula

$$\begin{aligned} L(t^k e^{\lambda t}) &= e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} t^{k-j} P^{(j)}(\lambda) \\ &= e^{\lambda t} (P(\lambda)t^k + kP'(\lambda)t^{k-1} + \dots + P^{(k)}(\lambda)). \end{aligned}$$

Rešitve nehomogene enačbe. Odtod vidimo, da ima vsaka nehomogena linearna enačba

$$Lx = \sum_{j=0}^n a_j x^{(n-j)} = Q(t)e^{\lambda t},$$

kjer je Q polinom stopnje k in $\lambda \in \mathbb{C}$, rešitev oblike

$$x(t) = R(t)e^{\lambda t},$$

kjer je $R(t)$ polinom iste stopnje k , če je $P(\lambda) \neq 0$, ter stopnje $k + j$, če je

$$P(\lambda) = 0, \dots, P^{(j-1)}(\lambda) = 0, P^{(j)}(\lambda) \neq 0.$$

V slednjem primeru lahko vzamemo $R(t) = t^j R_1(t)$ za nek polinom $R_1(t)$ stopnje k . Na ta način lahko poiščemo partikularno rešitev vsake nehomogene enačbe oblike

$$Lx = \sum_{j=1}^m Q_j(t)e^{\lambda_j t},$$

kjer so Q_j polinomi in so $\lambda_j \in \mathbb{C}$ realne ali kompleksne konstante.

Operatorji z nekonstantnimi koeficienti

Dobljene formule za izraze $L(t^k q(t))$ in v posebnem za $L(t^k e^{\lambda t})$ veljajo tudi, če koeficienti $a_j(t)$ operatorja L niso konstantni.

V tem primeru je karakterističen polinom funkcija dve spremenljivki:

$$P(t, \lambda) = \sum_{j=0}^n a_j(t) \lambda^{n-j},$$

torej je polinom v λ in zvezna funkcija v t . Operatorje $L^{(j)}$ v tem primeru definiramo s predpisom

$$L^{(j)} = P^{(j)}(t, D), \quad \text{kjer je } P^{(j)}(t, \lambda) = \frac{\partial^j P(t, \lambda)}{\partial \lambda^j}.$$

Bistvena razlika je v tem, da so sedaj koreni $\lambda_j = \lambda_j(t)$ enačbe $P(t, \lambda) = 0$ funkcije spremenljivke t . Funkcija $x(t) = e^{\lambda t}$ v splošnem ni rešitev homogene enačbe $Lx = 0$ za nobeno konstanto λ . Prav tako nam dobljene formule ne dajo partikularnih rešitev za desne strani obravnanega tipa.

Vsebina 12. predavanja: Enačba nihanja

V tem predavanju si bomo ogledali *enačbo dušenega nihanja*

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad k \geq 0, \omega > 0$$

ter sorodno nelinearno enačbo nihanja

$$\ddot{x} + k\dot{x} + q(x) = 0,$$

kjer je $q(0) = 0$ in $q'(0) > 0$.

Dobljene rešitve bomo uporabili pri rešitvi valovne enačbe $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

Enačba nihanja. Matematično gledano enačba

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

sprašuje po negativnih lastnih vrednostih in lastnih funkcijah operatorja $Lx = \ddot{x}$:

$$Lx = -\omega^2 x = \lambda x, \quad \lambda < 0.$$

S fizikalnega vidika enačba opisuje nihanje delca okrog ravnovesne lege $x = 0$ brez prisotnosti trenja (npr., nihanje idealne vzmeti, nihanje nihala, nihanje delca v elektromagnetnem valovanju, višina gladine morja na določeni točki ob valovanju, itd.)

Karakteričen polinom je $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ z ničlami $\lambda = \pm i\omega$. Splošna kompleksna rešitev je torej $z(t) = C e^{i\omega t}$ ($C \in \mathbb{C}$), realna rešitev pa

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega(t - t_0)), \quad A, B \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

To je nihanje (oscilacija) s kotno hitrostjo ω in amplitudo $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Energija se ohranja

Število $t_0 \in \mathbb{R}$ zadošča zahtevama

$$\cos(\omega t_0) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin(\omega t_0) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

enakost pa sledi iz adicijskega izreka.

Energija sistema je funkcija

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2},$$

to je vsota *kinetične energije* $\dot{x}^2/2$ in *potencialne energije* $\omega^2 x^2/2$. Njen odvod vzdolž rešitve $x(t)$ je enak

$$\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = \dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)\dot{x}(t) = \dot{x}(t)(\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)) = 0.$$

Fizikalno: Energija sistema se ohranja vzdolž vsake rešitve.

Matematično: energija E je prvi integral enačbe.

Dušeno nihanje. Enačba dušenega nihanja vsebuje dodatni člen $2p\dot{x}$, kjer je $p > 0$ faktor dušenja:

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

V splošnem je lahko $p = p(t)$ funkcija časa t . Oglejmo si primer, ko je p konstanta. Karakteristični polinom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2p\lambda + \omega^2$$

z ničlami

$$\lambda_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega^2} = -p \pm i\sqrt{\omega^2 - p^2}.$$

Če je $p > \omega$ (faktor dušenja je večji od kotne hitrosti), sta lastni vrednosti realni negativni in splošna rešitev je

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$

Pri $t \rightarrow +\infty$ gre rešitev eksponentno proti nič; do nihanja sploh ne pride. Podobno je v mejnem primeru $p = \omega$, ko je splošna rešitev

$$x(t) = e^{-\omega t}(A + Bt).$$

Oglejmo si najpomembnejši primer, ko je $0 < p < \omega$. Označimo

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - p^2}.$$

Splošna rešitev je

$$x(t) = e^{-pt}(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) = e^{-pt}\sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega_0(t - t_0)).$$

Amplituda nihanja se zmanjšuje s faktorjem e^{-pt} .

Odvod energije vzdolž rešitve je enak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) &= \dot{x}(t)\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)\dot{x}(t) \\ &= \dot{x}(t)(\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)) \\ &= -2p\dot{x}^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Energija sistema se eksponentno zmanjšuje, rešitve konvergirajo proti mirovni legi pri $t \rightarrow +\infty$.

Matematično: Energija E je funkcija Lyapunova prirejenega sistema

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -2pv - \omega^2 x.$$

Nelinearna enačba nihanja. Oglejmo si še enačbo

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + q(x) = 0, \quad q(0) = 0, \quad q'(0) > 0.$$

Enačbe v splošnem ne moremo rešiti eksplicitno, lahko po kvalitativno opišemo rešitve in obnašanje v okolici mirovne lege $x = 0$. V ta namen definiramo *potencialno energijo* U in *totalno energijo* E :

$$U(x) = \int_0^x q(s)ds, \quad E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x).$$

Nivojnice energije E za majhne vrednosti $E > 0$ so sklenjene krivulje okrog izhodišča v fazni ravnini $(x, \dot{x})$. Odvod energije vzdolž tokovnice je

$$\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + q(x)\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + q(x)) = -2p\dot{x}^2 \leq 0.$$

V primeru $p = 0$ (ni dušenja) je torej E prvi integral pridruženega sistema za $(x, \dot{x})$. Tak sistem se imenuje *konserватiven*.

Če je $p > 0$, pa je E funkcija Lyapunova v okolici $(0, 0)$. Tokovnice krožijo okrog izhodišča $(0, 0)$ in se mu spiralno približujejo, ko gre $t \rightarrow +\infty$.

Matematično nihalo

Konkreten primer je *matematično nihalo* (brez trenja), kjer x predstavlja kot:

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0.$$

Tedaj je

$$U(x) = \omega^2(1 - \cos x), \quad E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2(1 - \cos x) \geq 0.$$

Prirejeni sistem

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 \sin x$$

je periodičen s periodo 2π v x -spremenljivki. Tak je tudi njegov fazni portret, ki ga določajo nivojnice $E = C$.

Stacionarne točke (točke mirovanja) so pri $E = 0$, to so $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Za vrednosti $0 < C < 2\omega^2$ je nivojnica $E = C$ sklenjena krivulja okrog vsake stacionarne točke $(2k\pi, 0)$. Tok potuje od leve na desno pri $\dot{x} > 0$ in od desne na levo pri $\dot{x} < 0$.

Pri mejni vrednosti $C = 2\omega^2$ dobimo t.i. *separatrice*, ki povezujejo točki $(-\pi, 0)$ in $(+\pi, 0)$ (ter splošneje $((2k-1)\pi, 0)$ in $((2k+1)\pi, 0)$).

Za $C > 2\omega^2$ pa dobimo dve odprti periodični krivulji, simetrični glede na x -os. Energije sistema je sedaj tako velika, da se nihalo vrti vselej v isto smer.

Enačba nihanja strune

S temi orodji lahko obravnavamo valovno enačbo za funkcijo $u(t, x)$:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(t, 0) = 0, \quad u(t, \ell) = 0 \quad \text{za vsak } t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Ta predstavlja npr. nihanje strune dolžine ℓ , ki je vpeta na krajiščih.

Iščemo stacionarne (razcepne) rešitve $u(t, x) = T(t)X(x)$. Z ločitvijo spremenljivk dobimo dve navadni diferencialni enačbi:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = -c^2 \lambda \in \mathbb{R}, \quad X(0) = X(\ell) = 0.$$

Enačba za funkcijo $X(x)$ je

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0.$$

Naj bo $\lambda > 0$. Neupoštevaje robne pogoje imamo splošno rešitev

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Pri $x = 0$ je $X(0) = A = 0$, zato je $X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x)$.

Na krajišču $x = \ell$ dobimo pogoj

$$\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0, \quad \lambda_k = (k\pi/\ell)^2, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Nihanje strune

S tem smo dobili naslednje zaporedje rešitev enačbe za $X(x)$:

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Prepričaj se, da primer $\lambda \leq 0$ ne vodi do netrivialnih rešitev problema.

Števila λ_k vstavimo v enačbo za $T(t)$:

$$\ddot{T} + c^2 \lambda_k T = \ddot{T} + c^2 (k\pi/\ell)^2 T = 0.$$

Splošna rešitev je

$$T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}ct\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}ct\right).$$

Splošno rešitev valovne enačbe dobimo s superpozicijo stacionarnih valov:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x).$$

Seveda je potrebno obravnavati konvergenco dobljene trigonometrijske vrste.

Vsebina 13. predavanja: Osnove teorije stabilnosti

V tem predavanju obravnavamo osnovne pojme teorije stabilnosti dinamičnih sistemov. Glavne teme so naslednje:

- Stabilni, nestabilni in centralni podprostor linearnega sistema
- Izrek o stabilnosti linearnih sistemov
- Stabilnost majhnih perturbacij linearnih sistemov.
- Izrek Hartman-Grobman o topološki stabilnosti
- Pojem stabilne in nestabilne mnogoterosti negibne točke
- Poincaréjeva preslikava in stabilnost ciklov
- Kaotični pojavi v dinamičnih sistemih

Stabilni, nestabilni in centralni podprostor linearnega sistema

Naj bo A kvadratna $n \times n$ matrika in $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ pripadajoč linearni sistem diferencialnih enačb. Prosto $\mathbb{R}^n$ razcepimo na direktno vsoto treh vektorskih podprostorov:

$$\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_n \oplus E_c.$$

- *Stabilni prostor*, E_s , je linearna lupina vseh lastnih in korenskih vektorjev, ki pripadajo lastnim vrednostim λ matrike A z $\Re \lambda < 0$.
- *Nestabilni prostor*, E_n , je linearna lupina vseh lastnih in korenskih vektorjev, ki pripadajo lastnim vrednostim λ matrike A z $\Re \lambda > 0$.
- *Centralni prostor*, E_c , je linearna lupina vseh lastnih in korenskih vektorjev ki pripadajo lastnim vrednostim λ matrike A z $\Re \lambda = 0$.

Iz že narejene analize sledi, da se tok $\phi_t(\mathbf{x}) = e^{tA}\mathbf{x}$:

- eksponentno približuje izhodišču 0, če je $\mathbf{x} \in E_s$;
- eksponentno oddaljuje od izhodišča, če je $\mathbf{x} \in E_n$;
- miruje ali kroži, če je $\mathbf{x} \in E_c$ lastni vektor z lastno vrednostjo z $\Re \lambda = 0$;
- ima polinomsko obnašanje, če je $\mathbf{x} \in E_c$ korenski vektor z $\Re \lambda = 0$.

Stabilne in privlačne negibne točke

Opazujemo sistem diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

na neki domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in naj bo $\phi_t(\mathbf{x})$ njen tok.

Definicija. Negibna točka $\mathbf{x}^0 \in D$ sistema ($\mathbf{F}(\mathbf{x}^0) = 0$) je

- (a) *stabilna*, če za vsako okolico $O \subset D$ točke $\mathbf{x}^0$ obstaja manjša okolica $O' \subset O$ točke $\mathbf{x}^0$, tako da je $\phi_t(\mathbf{x}) \in O$ za vsak $\mathbf{x} \in O'$ in $t \geq 0$.
- (b) *privlačna*, če obstaja okolica O točke $\mathbf{x}^0$, tako da za vsak $\mathbf{x} \in O$ in $t \geq 0$ velja

$$\phi_t(\mathbf{x}) \in O \quad \text{in} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^0.$$

- (c) *globalno privlačna* na D , če velja točka (b) za $O = D$.
- (d) *(globalno) odbojna*, če je (globalno) privlačna pri obratu časa.

Stabilnost linearnega sistema

Iz prej povedanega ter definicij sledi naslednji izrek za linearni sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \text{na } \mathbb{R}^n.$$

- Izrek.**
- Če imajo vse lastne vrednosti matrike A negativen realni del, potem je izhodišče $0 \in \mathbb{R}^n$ globalno privlačna negibna točka.
 - Če vse lastne vrednosti A zadoščajo $\Re \lambda \leq 0$ in ima centralni prostor E_c bazo lastnih vektorjev, potem je $0 \in \mathbb{R}^n$ stabilna negibna točka.

Izrek lahko dokažemo tudi z uporabo metode Lyapunova. Oglejmo si najprej primer, ko je $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Tedaj je

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Če so vse lastne vrednosti ≤ 0 , je zgornji izraz ≤ 0 na $\mathbb{R}^n$ in zato je vsaka krogla $B_r = \{|\mathbf{x}| \leq r\}$ kletka za tok; torej je izhodišče stabilna točka.

Negativne lastne vrednosti

Če velja $\lambda_i < 0$ za $i = 1, \dots, n$, se tok eksponentno približuje izhodišču. Direktno to vidimo takole. Kvadratično formo $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ lahko ocenimo navzgor:

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq -c|\mathbf{x}|^2 \quad \text{za nek } c > 0.$$

Fiksiramo začetno točko $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in označimo

$$u(t) = |\phi_t(\mathbf{x})|^2 = |e^{tA}\mathbf{x}|^2.$$

Tedaj je

$$\dot{u}(t) = 2\dot{\phi}_t(\mathbf{x}) \cdot \phi_t(\mathbf{x}) = 2A\phi_t(\mathbf{x}) \cdot \phi_t(\mathbf{x}) \leq -2c|\phi_t(\mathbf{x})|^2 = -2cu(t).$$

Z integracijo dobimo

$$|\phi_t(\mathbf{x})|^2 = u(t) \leq e^{-2ct}u(0) = e^{-2ct}|\mathbf{x}|^2$$

$$|\phi_t(\mathbf{x})| \leq e^{-ct}|\mathbf{x}|.$$

Podobno analiziramo primer s parom konjugirano kompleksnih lastnih vrednostji $-a \pm ib$, $a > 0$ (ali več takimi pari).

Primer z Jordanovo kletko

Če matrika A ni diagonalizabilna, lahko dobimo analogno oceno kvadratične forme $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ v neki drugi bazi (ekvivalentno, za neko konjugirano matriko). Oglejmo si Jordanovo kletko J dimenzije k z lastno vrednostjo λ . Velja torej

$$J\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_1, \quad J\mathbf{e}_2 = \lambda\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1, \dots, J\mathbf{e}_k = \lambda\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k-1}.$$

Če izberemo $\mu > 0$ in uvedemo novo bazo korenskega podprostora

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_2 = \mu\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_3 = \mu^2\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}'_k = \mu^{k-1}\mathbf{e}_k,$$

dobimo v tej bazi posplošeno Jordanovo kletko $J_{\lambda,\mu}$ z lastno vrednostjo λ ter številom μ na prvi zgornji naddiagonali. Pri majhnem μ je to majhna perturbacija diagonalne matrike. Če je $\lambda < 0$, dobimo pri majhnem μ oceno

$$J_{\lambda,\mu}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq -c|\mathbf{x}|^2$$

za nek $c > 0$. Odtod sledi enako kot prej, da se tok na tem korenskem podprostoru eksponentno približuje izhodišču.

Če ima centralni podprostor E_c bazo lastnih vektorjev, velja $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq 0$ za vse $\mathbf{x} \in E_c$, in posledično za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Torej je 0 stabilna negibna točka.

Nelinearna perturbacija linearnega sistema

Oglejmo si sedaj nelinearen sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0.$$

Izrek. Če vse lastne vrednosti matrike $A = dF_0$ zadoščajo $\Re \lambda < 0$, je 0 privlačna negibna točka zgornjega sistema.

Dokaz Po spremembi baze v $\mathbb{R}^n$ (oziroma konjugaciji matrike A) velja $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq -c|\mathbf{x}|^2$ za neko konstanto $c > 0$. Naj bo $\mathbf{x}(t) = \phi_t(\mathbf{x})$ trajektorija z začetno točko $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ blizu izhodišča. Oglejmo si funkcijo $u(t) = |\mathbf{x}(t)|^2$.

$$\dot{u}(t) = 2\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{x}(t) = 2A\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}(t).$$

Ker je $|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))| = o(|\mathbf{x}(t)|)$, je $|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}(t)| = o(|\mathbf{x}(t)|^2)$ in zato

$$\dot{u}(t) \leq -2c_0|\mathbf{x}(t)|^2 = -2c_0u(t)$$

za neko konstanto $-c < -c_0 < 0$. Kot prej sledi $|\mathbf{x}(t)| \leq e^{-c_0 t}|\mathbf{x}(0)|$.

Izrek Hartman-Grobman

Pojavi se vprašanje, kdaj je nelinearna perturbacija linearnega sistema konjugirana linearnemu sistemu, v smislu da lahko enega prevedemo v drugega z zamenjavo koordinat v okolici negibne točke. Velja naslednji izrek.

Izrek. Naj bo A matrika, katere lastne vrednosti imajo neničeln realni del. Naj bo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0$$

majhna $\mathcal{C}^1$ perturbacija linearnega sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ in označimo s ϕ_t njegov tok. Tedaj obstaja homeomorfizem Θ v okolici 0 s $\Theta(0) = 0$, ki zadošča

$$\Theta(\phi_t(\mathbf{x})) = e^{tA} \Theta(\mathbf{x})$$

za majhne vrednosti $|t|$ in za točke $\mathbf{x}$ blizu 0.

To pomeni, da Θ preslika tok nelinearnega polja $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ v tok linearnega polja $A\mathbf{x}$ (to je linearizacija polja $\mathbf{F}$ v 0) v okolici negibne točke 0. Fazna portreta ima torej enake topološke karakteristike.

Linearizacija z difeomorfizmi

Izreka Hartman-Grobman ne bomo dokazali, ker je sorazmerno zahteven.

Seveda je še pomembnejše vprašanje, kdaj je nelinearen sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

v okolici negibne točke konjugiran linearnemu sistemu; to je, kdaj obstaja difeomorfizem Θ v okolici 0, ki zadošča

$$d\Theta_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A \cdot \Theta(\mathbf{x}).$$

Iz tega seveda sledi, da Θ preslika tok polja $\mathbf{F}$ v tok linearnega polja.

Znano je, da to velja za veliko večino matrik, katerih lastne vrednosti imajo neničelne realne dele. Izjeme so matrike, pri katerih obstajajo določene celoštevilске relacije (t.i. resonance) med njihovimi lastnimi vrednostmi.

Ta teorija je precej zahtevna in je ne bomo podrobneje obravnavali.

Stabilna in nestabilna mnogoterost

Ponovno opazujemo sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} = 0.$$

Pojavi se vprašanje, kakšno strukturo imata množici

$$W_s = \{\mathbf{x} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\mathbf{x}) = 0\}, \quad W_n = \{\mathbf{x} : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Velja naslednji izrek.

Izrek. Denimo, da ima $n \times n$ matrika $A = d\mathbf{F}_0$ natanko k lastnih vrednosti z negativnim realnim delom ter $n - k$ lastnih vrednosti s pozitivnim realnim delom. Potem sta množici W_s in W_n v okolici izhodišča $\mathcal{C}^1$ podmnogoterosti dimenzije k oziroma $n - k$.

Natačneje, če je $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_n$ razcep na stabilni in nestabilni podprostor matrike A , potem je W_s v izhodišču tangentna na E_s , W_n pa je v izhodišču tangentna na E_n .

W_s se imenuje *stabilna mnogoterost*, W_n pa *nestabilna mnogoterost* točke 0. Če je negibna točka $\mathbf{p}$, uporabljamo oznake $W_s(\mathbf{p})$ in $W_n(\mathbf{p})$.

Z izbiro koordinat lahko dosežemo, da je

$$E_s = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}, \quad E_n = \{0\}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Tedaj je W_s graf neke $\mathcal{C}^1$ preslikave $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ v okolici $0 \in \mathbb{R}^k$ z $dg_0 = 0$.

Analogno je W_n graf neke $\mathcal{C}^1$ preslikave $h : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ v okolici $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ z $dh_0 = 0$.

Če je Θ topološka ali difeomorfna konjugacija toka ϕ_t polja $\mathbf{F}$ v tok e^{tA} linearnega polja $A\mathbf{x}$, potem v neki okolici izhodišča velja

$$\Theta(W_s) = E_s, \quad \Theta(W_n) = E_n.$$

Poanta izreka je v tem, da tudi če gladka konjugacija ne obstaja (ampak je Θ le homeomorfizem, ki obstaja po izreku Hartman-Grobman), sta W_s in W_n dobro definirani $\mathcal{C}^1$ podmnogoterosti, ki sta v izhodišču tangentni na E_s oz. E_n .

Primer 1

Oglejmo si sistem

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y + x^2; \quad \mathbf{F}(x, y) = (-x, y + x^2).$$

Očitno je $(0, 0)$ negibna točka (ničla vektorskega polja $\mathbf{F}$) in njegova linearizacija v $(0, 0)$ je

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y; \quad A = \text{diag}(-1, 1).$$

Tok nelinearnega polja je

$$\phi_t(x, y) = (e^{-t}x, e^t(y + x^2/3) - e^{-2t}x^2/3),$$

tok linearnega polja pa

$$\psi_t(x, y) = (e^{-t}x, e^ty).$$

Linearizacijo iščemo z nastavkom

$$\Theta(x, y) = (x, y + cx^2).$$

Stabilna in nestabilna mnogoterost v primeru 1

Konjugacijska enačba

$$d\Theta(x, y)\mathbf{F}(x, y) = A \cdot \Theta(x, y)$$

nam s preprostim računom da rešitev

$$c = 1/3, \quad \Theta(x, y) = (x, y + x^2/3), \quad \Theta^{-1}(x, y) = (x, y - x^2/3).$$

V tem primeru je

$$E_s = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad E_n = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Stabilna in nestabilna mnogoterost točke $(0, 0)$ v sistemu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ sta

$$\begin{aligned} W_s &= \Theta^{-1}(E_s) = \{(x, y) : y = -x^2/3\}, \\ W_n &= \Theta^{-1}(E_n) = \{(x, y) : x = 0\} = E_n. \end{aligned}$$

Primer 2

Oglejmo si sistem

$$\dot{x} = x(x - 1), \quad \dot{y} = -y.$$

Linearizacija v $(0, 0)$ je

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y, \quad E_s = \mathbb{R}^2.$$

Točka $(0, 0)$ je privlačna negibna točka.

Linearizacija v $(1, 0)$ je

$$\dot{x} = x - 1, \quad \dot{y} = -y,$$

Točka $(1, 0)$ je hiperbolična (sedelna) negibna točka.

Stabilne in nestabilne mnogoterosti obeh stacionarnih točk so

$$\begin{aligned} W_s(0, 0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1\}, & W_n(0, 0) &= \{(0, 0)\}, \\ W_s(1, 0) &= \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}, & W_n(1, 0) &= \{(x, 0) : 0 < x < +\infty\} \end{aligned}$$

Stabilnost ciklov

Cikel je sklenjena (periodična) orbita vektorskega polja.

Posplošeni cikel sestoji iz končno mnogo trajektorij, ki povezujejo pare kritičnih točk (ničel vektorskega polja) v ustreznih smereh in se sklenejo v cikel.

Cikel C je *stabilen*, če za vsako njegovo okolico U obstaja manjša okolica $C \subset U' \subset U$, tako da trajektorije z začetkom v U' ostanejo v U pri vseh $t > 0$.

Cikel C je *asimptotično stabilen* ali *privlačen*, če ima okolico U , tako da za vsako točko $\mathbf{x} \in U$ velja

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi_t(\mathbf{x}), C) = 0.$$

To pomeni, da se vse bližnje trajektorije približujejo ciklu C .

Analizo stabilnosti cikla lahko naredimo tako, da si ogledamo dinamiko Poincaréjeve (povratne) preslikave; angl. *Poincaré first return map*.

Pri tem si lahko pomagamo z linearizacijo danega sistema diferencialnih enačb vzdolž cikla.

Poincaréjeva povratna preslikava

Naj bo $\mathbf{F}$ vektorsko polje na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Naj bo $C \subset D$ cikel polja $\mathbf{F}$ in $\mathbf{p} \in C$ poljubna točka na njem. Označimo s $T(\mathbf{p}) > 0$ periodo (obhodni čas) cikla; ta je neodvisna od izbire točke $\mathbf{p} \in C$.

Izberimo hiperravnino $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, ki gre skozi $\mathbf{p}$ in ne vsebuje vektorja $\mathbf{F}(\mathbf{p})$; pravimo, da je Σ *transverzalna* na C v točki $\mathbf{p}$. Naj bo U neka okolica točke $\mathbf{p}$. Po izreku o zveznosti rešitev sistema obstaja manjša okolica U' točke $\mathbf{p}$, tako da za vsako točko $\mathbf{x} \in \Sigma \cap U'$ trajektorija $\phi_t(\mathbf{x})$ seka Σ pri nekem prvem času $T(\mathbf{x})$, ki je blizu $T(\mathbf{p})$, in velja

$$P(\mathbf{x}) := \phi_{T(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Sigma \cap U.$$

(Trajektorija lahko seka Σ tudi pri kasnejših obhodih, seveda pa se lahko sčasoma oddalji od cikla in se več ne vrne.) Preslikava

$$P : \Sigma \cap U' \rightarrow \Sigma \cap U, \quad \mathbf{x} \mapsto P(\mathbf{x})$$

se imenuje *Poincaréjeva povratna preslikava*. Funkciji $\mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x})$ ter $\mathbf{x} \mapsto P(\mathbf{x})$ sta zvezni in tudi gladki, če je vektorsko polje gladko.

Dinamika Poincaréjeve preslikave in stabilnost cikla

Za vsako naravno število $k \in \mathbb{N}$ označimo s P^k k -ti iterat preslikave P :

$$P^k = \overbrace{P \circ P \circ \dots \circ P}^k.$$

Izrek. Če je točka $\mathbf{p} \in C$ na ciklu C stabilna negibna točka zaporedja iteratov $\{P^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (to je, za vsako okolico U točke $\mathbf{p}$ obstaja manjša okolica $\mathbf{p} \in U' \subset U$, tako da za vsak $\mathbf{x} \in \Sigma \cap U'$ velja $P^k(\mathbf{x}) \in U$ za vse $k \in \mathbb{N}$), potem je C stabilen cikel.

Če je $\mathbf{p}$ privlačna negibna točka preslikave P (to je, za vse $\mathbf{x} \in \Sigma$ blizu $\mathbf{p}$ velja $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k(\mathbf{x}) = \mathbf{p}$), potem je cikel C privlačen.

Izrek je intuitivno očiten, saj je obhodni čas $T(\mathbf{x})$ zvezna funkcija točke in zato se trajektorija med enim obhodom nima časa bistveno oddaljiti od cikla C . V primeru, da je $\mathbf{p} = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k(\mathbf{x})$ se trajektorija približuje limitnemu ciklu C .

Analiza je neodvisna od izbire točke $\mathbf{p} \in C$ in transverzale Σ .

Poincaréjeva preslikava pri ravninskih sistemih

Dinamični sistemi na domenah v ravnini $\mathbb{R}^2$ so posebej preprosti s stališča teorije stabilnosti. Eden od pomembnih razlogov za to je dejstvo, da vsaka Jordanova krivulja, torej homeomorfna slika krožnice v ravnini, slednjo razdeli na dve povezani komponenti:

- notranjo (omejeno), ki je difeomorfna disku, ter
- zunanjo (neomejeno), ki je difeomorfna punktiranemu disku.

To je *Jordan-Schoenfliesov izrek*.

Z njegovo pomočjo zlahka vidimo, da je Poincaréjeva povratna preslikava monotona na obeh poltrakah $\Sigma \setminus \{\mathbf{p}\} = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ transverzale.

Iterati $P^k(\mathbf{x})$ se torej bodisi približujejo $\mathbf{p}$ bodisi oddaljujejo od $\mathbf{p}$, ne morejo pa oscilirati ali preiti na drugo stran Σ_- . Obnašanje je lahko različno na poltrakah Σ_+ in Σ_- : ena stran je lahko privlačna in druga odbojna.

Za točko $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ definiramo limitno množico $\omega_{\pm}(\mathbf{x})$ kot množico vseh stekališč tokovnice $\phi_t(\mathbf{x})$ v D , ko gre $t \rightarrow \pm\infty$. Vprašanje je, kaj so lahko limitne množice. Izkaže se, da v ravnini ni veliko možnosti. Naslednji izrek se dokaže s pomočjo monotonosti Poincaréjeve povratne preslikave.

Izrek Poincaré-Bendixson in Lorenzov atraktor

Izrek (Poincaré-Bendixson). V ravninskem dinamičnem sistemu je vsaka limitna množica $\omega_{\pm}(\mathbf{x})$ enega od naslednjih tipov:

- negibna točka (ničla vektorskega polja),
- cikel (periodična orbita), ali
- posplošeni cikel.

Po drugi strani pa v sistemih na $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 3$ obstajajo zelo nenavadne limitne množice. Prvi znani tovrstni primer v literaturi je bil naslednji *Lorenzov sistem* na $\mathbb{R}^3$, ki izvira iz študija vremenskih pojavov (glej npr. G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, 2012, razdelek 8.2).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \quad (\sigma, r, b > 0).\end{aligned}$$

Pri vrednostih $r > 1$ obstaja t.i. *čuden atraktor* A , sestavljen iz neskončno mnogo razvejanih ploskev, med katerimi prehajajo orbite na kaotičen način, tako da je za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ limitna množica $\omega_+(\mathbf{x}) = A$.

14. predavanje: 4. poglavje — Variacijski račun

V tem in naslednjih predavanjih obravnavamo osnove variacijskega računa.

Problem je naslednji. Dan je predpis $\mathcal{L}$, ki vsaki zvezno odvedljivi funkciji $x = x(t)$ na dani domeni, npr. na zaprtem intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, priredi število $\mathcal{L}(x) \in \mathbb{R}$, ki je odvisna od funkcije $x(t)$. Tak predpis se imenuje *funkcional* na danem prostoru funkcij; $\mathcal{L}$ je torej "funkcija na funkcijah".

Zanima nas, kako bi poiskali funkcije, pri katerih funkcional $\mathcal{L}$ zavzame ekstremno vrednost, to je (lokalni ali globalni) minimum ali maksimum.

Primer 1: Poišči zvezno odvedljive poti

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, 1],$$

z danima vrednostima $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{b}$, ki imajo najmanjšo dolžino

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dots + \dot{x}_n(t)^2} dt.$$

Rešitev poznamo: to so monotone parametrizacije daljice od $\mathbf{a}$ do $\mathbf{b}$.

Ideja: redukcija na iskanje ekstremov funkcij ene spremenljivke

Naj bo $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t))$, $t \in [0, 1]$, poljubna zvezno odvedljiva vektorska funkcija z robnima vrednostima $\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(1) = \mathbf{0}$. Oglejmo si družino poti

$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{x}(t, s) = \mathbf{x}(t) + s \mathbf{h}(t), \quad t \in [0, 1], \quad s \in \mathbb{R}.$$

Očitno velja $\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}_s(1) = \mathbf{b}$ za vsak $s \in \mathbb{R}$.

Če ima pot $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t)$ najmanjšo dolžino med vsemi bližnjimi potmi, ima skalarna funkcija $\mathbb{R} \ni s \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{x}_s) \in \mathbb{R}$ lokalni minimum pri $s = 0$ in zato je

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\mathbf{x}_s) = 0.$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_s) = \int_0^1 \|\dot{\mathbf{x}}(t) + s \dot{\mathbf{h}}(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|^2 + 2s \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{h}}(t) + s^2 \|\dot{\mathbf{h}}(t)\|^2} dt.$$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\mathbf{x}_s) = \int_0^1 \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{h}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} dt = 0.$$

Ta identiteta mora veljati za vse gladke funkcije $\mathbf{h}(t)$ z robnima vrednostima 0.

Da bi problem poenostavili, se spomnimo, da je dolžina poti neodvisna od izbire parametrizacije. Če pot parametriziramo z naravnim parametrom, je $\|\dot{\mathbf{x}}\| \equiv 1$. V tem primeru potrebujemo interval $[0, \mathcal{L}(\mathbf{x})]$ oziroma, če reparametriziramo nazaj na $[0, 1]$, je $\|\dot{\mathbf{x}}\| \equiv \mathcal{L}(\mathbf{x})$ konstantna.

Sedaj zgornji integral brez te konstante integrirajmo per partes in upoštevajmo $\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(1) = \mathbf{0}$:

$$\int_0^1 \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{h}}(t) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \dot{x}_j(t) \dot{h}_j(t) dt = - \int_0^1 \sum_{j=1}^n \ddot{x}_j(t) h_j(t) dt = 0.$$

To velja za vse zvezne odvedljive funkcije $\mathbf{h}$ z $\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(1) = \mathbf{0}$.

Odtod sledi

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0} \quad \text{za vse } t \in [0, 1].$$

To pomeni, da je hitrost $\dot{\mathbf{x}}(t)$ konstantna, zato je $\mathbf{x}(t)$ linearna parametrizacija daljice od $\mathbf{x}(0)$ do $\mathbf{x}(1)$.

To sledi iz naslednje trditve, ki jo bomo v nadaljevanju večkrat uporabili.

Variacijska lema

Lemma 0.2. *Naj bo $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ zvezna pot na $[a, b] \in \mathbb{R}^n$, tako da za vsako gladko pot $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ s $\mathbf{h}(a) = \mathbf{h}(b) = \mathbf{0}$ velja*

$$\int_a^b \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{h}(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n g_i(t) h_i(t) dt = 0.$$

Potem je $\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{0}$.

Dokaz Če izberemo vse funkcije h_i razen ene enake nič, vidimo, da zadošča dokazati trditev v primeru $n = 1$.

Denimo, da zvezna funkcija $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ni identično enaka nič. Izberimo točko $t_0 \in (a, b)$, tako da $g(t_0) \neq 0$. Recimo, da je $g(t_0) > 0$. Zaradi zveznosti obstaja interval $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a, b]$, tako da je $g(t) > 0$ za vsak $t \in I$.

Izberimo gladko funkcijo $h(t) \geq 0$ tako, da je $h(t_0) > 0$ in je $h(t) = 0$ za vsak $t \in [a, b] \setminus I$. Potem je $g(t)h(t) \geq 0$ na $[a, b]$ in $g(t_0)h(t_0) > 0$, zato $\int_a^b g(t)h(t)dt > 0$, kar je v protislovju s predpostavko. Analogen sklep lahko naredimo, če je $g(t_0) < 0$, tako da izberemo $h(t) \leq 0$ in $h(t_0) < 0$.

Druga varianta zaključka dokaza

Povrnimo se za trenutek k identiteti

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{L}(\mathbf{x}_s) = \int_0^1 \frac{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{h}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} dt = 0,$$

ki mora veljati za vse gladke funkcije $\mathbf{h}(t)$ z robnimi vrednostima 0.

Namesto da najprej reparametriziramo pot z naravnim parametrom in s tem dosežemo, da je dolžina $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|$ konstantna, lahko sklepamo tudi takole. Iz variacijske leme sledi, da je

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = C_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Če pišemo $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n$, to pomeni

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|, \quad t \in [0, 1].$$

Smer hitrostnega vektorja je torej neodvisna od t , zato je pot $\mathbf{x}(t)$ parametrizacija daljice, usmerjene z vektorjem $\mathbf{C}$.

Osnovna naloga variacijskega računa

Sedaj si oglejmo splošnejši problem te vrste. Opazovali bomo funkcije na $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$; ista analiza velja na kateremkoli kompaktnem intervalu v $\mathbb{R}$.

Označimo s $\mathcal{C}^1(I)$ vektorski prostor vseh zvezno odvedljivih funkcij $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ in ga opremimo z normo

$$\|x\| = \max_{t \in I} |x(t)| + \max_{t \in I} |\dot{x}(t)|$$

in prirejeno metriko $d(x, y) = \|x - y\|$. Preveri, da je to zares norma:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|cx\| = |c| \cdot \|x\| \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Prostor $\mathcal{C}^1(I)$ s to normo in metriko je *poln*, to je, vsako Cauchyjevo zaporedje konvergira. (Zakaj?)

Poln normiran vektorski prostor se imenuje *Banachov prostor*.

Lagrangejevo jedro in funkcional

Naj bo L neka dvakrat zvezno odvedljiva realna funkcija na $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$. Vsaki funkciji $x \in \mathcal{C}^1(I)$ priredimo število

$$\mathcal{L}(x) = \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \in \mathbb{R}.$$

Funkcijo $\mathcal{L} : \mathcal{C}^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ imenujemo *Lagrangejev funkcional z jedrom L* .

Osnovna naloga: Fiksirajmo števili $a, b \in \mathbb{R}$ in označimo

$$D(a, b) = \{x \in \mathcal{C}^1(I) : x(0) = a, x(1) = b\}.$$

Poišči ekstreme Lagrangejevega funkcionala $\mathcal{L} : D(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, torej funkcije $x \in D(a, b)$, pri katerih ima $\mathcal{L}$ lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Za vsak par funkcij $x, y \in D(a, b)$ je njuna razlika $v = y - x \in D(0, 0)$, torej $v(0) = v(1) = 0$. Velja tudi obratno:

$$x \in D(a, b), v \in D(0, 0) \implies x + v \in D(a, b).$$

Stacionarna točka Lagrangejevega funkcionala

Izberimo $v \in D(0, 0)$ in si za neko $x \in D(a, b)$ oglejmo skalarno funkcijo

$$\mathbb{R} \ni s \longmapsto \mathcal{L}(x + sv) = \int_0^1 L(t, x(t) + sv(t), \dot{x}(t) + s\dot{v}(t)) dt \in \mathbb{R}.$$

Če je $x \in D(a, b)$ ekstremalna funkcija za $\mathcal{L}$ (lokalni maksimum ali minimum), potem je število $s = 0$ stacionarna točka funkcije $s \mapsto \mathcal{L}(x + sv)$, torej velja

$$(\nabla_v \mathcal{L})(x) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(x + sv) = 0.$$

To je *smerni odvod ali prva variacija funkcionala $\mathcal{L}$ v točki $x \in D(a, b) \subset \mathcal{C}^1(I)$ v smeri tangentnega vektorja $v \in D(0, 0)$* .

Definicija. Točka $x \in D(a, b)$, v kateri velja $(\nabla_v \mathcal{L})(x) = 0$ za vse $v \in D(0, 0)$, se imenuje *stacionarna točka funkcionala $\mathcal{L} : D(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$* .

Euler-Lagrangejeva enačba

Sedaj bomo izpeljali diferencialno enačbo za stacionarne točke. Velja:

$$\begin{aligned} (\nabla_v \mathcal{L})(x) &= \int_0^1 \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(t, x(t) + sv(t), \dot{x}(t) + s\dot{v}(t)) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} L(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{v}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Oznaki $\partial/\partial x$ in $\partial/\partial \dot{x}$ pomenita parcialna odvoda funkcije L po spremenljivkah, ki ju zasedata $x(t)$ in $\dot{x}(t)$. V nadaljevanju označimo te odvode z L_x in $L_{\dot{x}}$.

Denimo sedaj, da sta funkciji x in L razreda $\mathcal{C}^2$. Tedaj je $L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ zvezno odvedljiva po t in lahko drugi člen na desni strani integriramo per partes. Upošteva robne pogoje $v(0) = v(1) = 0$ dobimo

$$\int_0^1 L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{v}(t) dt = - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) dt.$$

Formula za smerni odvod je torej

$$(\nabla_v \mathcal{L})(x) = \int_0^1 \left(L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) v(t) dt.$$

Euler-Lagrangejeva enačba

Videli smo, da ob predpostavki $x \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ in $L \in \mathcal{C}([0, 1] \times \mathbb{R}^2)$ velja

$$(\nabla_v \mathcal{L})(x) = \int_0^1 \left(L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) v(t) dt$$

Če velja $(\nabla_v \mathcal{L})(x) = 0$ za vse $v \in D(0, 0)$, je funkcija pod integralom identično enaka 0 po variacijski lemi. S tem smo dokazali:

Izrek (L. Euler 1744; J.-L. Lagrange 1760). Funkcija $x \in D(a, b) \subset \mathcal{C}^2(I)$ je stacionarna točka Lagrangejevega funkcionala $\mathcal{L}(x) = \int_I L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ na $D(a, b)$ natanko tedaj, ko velja

$$L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad t \in I.$$

Ta diferencialna enačba 2. reda se imenuje *Euler-Lagrangejeva enačba*. Vsak lokalni ekstrem funkcionala $\mathcal{L}$ zadošča tej enačbi.

Eksplíciten zapis Euler-Lagrangejeve enačbe

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) &= L_{t\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ &+ L_{x\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{x}(t) + L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \ddot{x}(t) \end{aligned}$$

Euler-Lagrangejeva enačba:

$$\begin{aligned} L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \ddot{x}(t) + L_{x\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{x}(t) \\ + L_{t\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) - L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Okrajšano:

$$L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \ddot{x} + L_{x\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \dot{x} + L_{t\dot{x}}(t, x, \dot{x}) - L_x(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Tehnična težava

Dobljen rezultat ni povsem zadovoljiv, saj smo morali za njegovo veljavnost predpostaviti, da sta funkciji x in L razreda $\mathcal{C}^2$, osnovni problem pa je zastavljen za funkcije, ki so le razreda $\mathcal{C}^1$. V tem primeru ne moremo integrirati drugega člena v vsoti za $(\nabla_v \mathcal{L})(x)$ per partes, saj je funkcija $\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t))$ samo zvezna v t , ne pa tudi odvedljiva.

Vrnimo se na osnovno formulo za smerni odvod funkcionala $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} (\nabla_v \mathcal{L})(x) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(t, x(t) + sv(t), \dot{x}(t) + s\dot{v}(t)) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} L(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{v}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Radi bi videli, da je v primeru, ko je $(\nabla_v \mathcal{L})(x) = 0$ za vse $v \in D(0, 0)$ (torej je x stacionarna točka funkcionala $\mathcal{L}$) funkcija $\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t))$ dejansko zvezno odvedljiva po t in zato x zadošča Euler-Lagrangejevi enačbi.

Ta sklep je pravilen, kot sledi iz naslednje leme.

Splošnejša variacijska lema

Lemma 0.3 (P. du Bois-Reymond, 1879; A. Razmadze, 1921). *Naj bosta f in g zvezni funkciji na $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, za kateri velja*

$$\int_a^b (f(t)v(t) + g(t)\dot{v}(t)) dt = 0$$

za vsako funkcijo $v \in \mathcal{C}^1(I)$, ki zadošča $v(a) = v(b) = 0$. Tedaj je g zvezno odvedljiva in velja $f = \dot{g}$. (Obratno, pri $f = \dot{g}$ je integral enak $\int_a^b d(gv) = 0$.)

Dokaz Lahko vzamemo $I = [0, 1]$.

Najprej si oglejmo poseben primer $f = 0$. Naj bo $c = \int_0^1 g(t) dt$. Tedaj je

$$\int_0^1 (g(t) - c)\dot{v}(t) dt = \int_0^1 g(t)\dot{v}(t) dt - c \int_0^1 \dot{v}(t) dt = 0.$$

Če definiramo

$$v(t) = \int_0^t (g(s) - c) ds,$$

je $v(0) = 0$, $v(1) = 0$, $\dot{v}(t) = g(t) - c$ in zato

$$\int_0^1 (g(t) - c)^2 dt = 0 \implies g(t) = c \text{ za vsak } t \in I \implies \dot{g} = 0 = f.$$

Splošni primer

Definirajmo funkcijo

$$h(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad \dot{h}(t) = f(t).$$

Z integracijo prvega člena per partes dobimo

$$\int_0^1 f(t)v(t) dt = \int_0^1 \dot{h}(t)v(t) dt = - \int_0^1 h(t)\dot{v}(t) dt$$

in zato

$$0 = \int_0^1 (f(t)v(t) + g(t)\dot{v}(t)) dt = \int_0^1 (g(t) - h(t))\dot{v}(t) dt$$

za vsako funkcijo $v \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, ki zadošča $v(0) = v(1) = 0$. Iz posebnega primera zaključimo, da je $g(t) - h(t)$ konstanta, zato je

$$\dot{g}(t) = \dot{h}(t) = f(t).$$

Euler-Lagrangejeva enačba za vektorske funkcije

Povsem analogno izpeljemo naslednji Euler-Lagrangejev izrek za vektorske funkcije.

Izrek (L. Euler, J.-L. Lagrange 1760). Naj bo L funkcija razreda $\mathcal{C}^1$ na $I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, kjer je I kompakten interval v $\mathbb{R}$. Funkcija $\mathbf{x} \in D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ je stacionarna točka Lagrangejevega funkcionala

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \int_I L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt$$

natanko tedaj, ko velja

$$L_{x_i}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{x}_i}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0, \quad t \in I, \quad i = 1, \dots, n.$$

To je sistem n navadnih diferencialnih enačb drugega reda za funkcijo $\mathbf{x}(t)$.

Za identifikacijo lokalnih ekstremov ter njihovega tipa je potrebno obravnavati *drugo variacijo* funkcionala $\mathcal{L}$.

Variacije splošnejšega tipa

Do sedaj smo obravnavali linearne variacije dane funkcije $x(t)$, torej variacije oblike

$$(t, s) \mapsto x(t) + s v(t), \quad s \in \mathbb{R},$$

kjer je $v(t)$ funkcija z vrednostjo 0 v krajiščih intervala.

Lahko bi opazovali splošnejše variacije

$$x(t, s) = x(t) + s v(t) + o(s), \quad v(t) = \left. \frac{\partial}{\partial s} x(t, s) \right|_{s=0}, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{o(s)}{s} = 0,$$

kjer sta števili $x(a, s)$ in $x(b, s)$ neodvisni od s v krajiščih a, b intervala I . Vendar se iz izpeljave vidi, da je število

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(x(\cdot, s)) = \int_I \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(t, x(\cdot, s), \dot{x}(\cdot, s)) dt$$

odvisno le od linearnega člena $v(t)$ v deformaciji $x(t, s)$, torej enako $\nabla_v \mathcal{L}(x)$. Zato takih splošnejših deformacij ni potrebno obravnavati.

Nadalje se je v raznih geometrijskih problemih mogoče brez škode za splošnost omejiti na bolj posebne deformacije. Npr., če opazujemo dolžino imerzirane poti $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, je dovolj opazovati deformacije v smereh $\mathbf{v}(t)$, ki so v vsaki točki pravokotne na tangentni vektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$, saj tangenta komponenta prispeva le k reparametrizaciji poti in ne vpliva na rešitev problema.

Lagrangiani posebnega tipa

Prvi poseben primer je Lagrangian oblike

$$L(t, \dot{\mathbf{x}}) \quad (\text{neodvisen od } \mathbf{x})$$

V tem primeru je $L_x = 0$ in Euler-Lagrangejeva enačba $L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} = 0$ se reducira na

$$L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \dot{\mathbf{x}}(t)) = C \in \mathbb{R}^n.$$

Tak primer smo imeli pri iskanju poti najmanjše dolžine med dvema točkama v $\mathbb{R}^n$ v evklidski metriki, kjer je

$$L(t, \dot{\mathbf{x}}) = \|\dot{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \cdots + \dot{x}_n^2}$$

in

$$L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \dot{\mathbf{x}}(t)) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|} = \mathbf{C} \in \mathbb{R}^n.$$

Lagrangian $L(x, \dot{x})$, neodvisen od t

V tem primeru se Euler-Lagrangejeva enačba $L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0$ reducira na *Beltramijevo identiteto*

$$L - \dot{x}L_{\dot{x}} = C \in \mathbb{R}.$$

To vidimo iz naslednjega računa:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L(x, \dot{x}) - \dot{x}L_{\dot{x}}(x, \dot{x})) &= L_x\dot{x} + L_{\dot{x}}\ddot{x} - \ddot{x}L_{\dot{x}} - \dot{x}\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} \\ &= \dot{x}\left(L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\right). \end{aligned}$$

Če velja Euler-Lagrangejeva enačba $L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0$, dobimo

$$\frac{d}{dt}(L - \dot{x}L_{\dot{x}}) = 0$$

in je zato $L - \dot{x}L_{\dot{x}}$ konstanta.

Obratno, če je $L - \dot{x}L_{\dot{x}}$ konstanta in ima množica $\{t \in [0, 1] : \dot{x} = 0\}$ prazno notranjost (kar velja v vseh naravnih primerih, kjer je x kandidat za ekstrem), sledi Euler-Lagrangejeva enačba $L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0$.

Vsebina 15. predavanja: Primeri ekstremov funkcionalov

V tem predavanju bomo uporabili Euler-Lagrangejevo metodo za rešitev nekaterih klasičnih optimizacijskih problemov.

- Verižnica
- Brahistokrona
- Geodetske krivulje

Primer 1: Verižnica

Raztegljivo verigo obesimo na dva droga različnih višin in jo pustimo, da prosto visi pod vplivom težnosti. Kakšno krivuljo dobimo?

Fizikalna izpeljava, ki jo prepustimo fizikom, sledi načelu, da je pri rešitvi dosežen minimum potencialne energije. Ustrezen graf $y(x)$ na intervalu $[a, b]$ z robnima vrednostima $y(a) = \alpha > 0$, $y(b) = \beta > 0$ minimizira integral

$$\mathcal{L}(y) = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Lagrangian $L(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$ je neodvisen od x in problem se prevede na Beltramijevo identiteto:

$$L - y' L_{y'} = y\sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \in \mathbb{R}.$$

Če pomnožimo z $\sqrt{1 + y'^2}$, dobimo

$$y = C\sqrt{1 + y'^2}, \quad C > 0.$$

Verižnica

To enačbo lahko rešimo parametrično z nastavkom

$$\frac{dy}{dx} = y' = \sinh t, \quad y = C\sqrt{1 + \sinh^2 t} = C \cosh t.$$

Odvajajmo y po x :

$$\sinh t = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = C \sinh t \frac{dt}{dx} \iff \frac{dx}{dt} = C.$$

Odtod

$$x(t) = Ct + D, \quad y = C \cosh t = C \cosh \left(\frac{x - D}{C} \right).$$

Konstanti C, D določimo iz robnih vrednosti $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

Te krivulje se imenujejo *verižnice* (*catenal curves*). Osnovna verižnica je $y = \cosh x$, druge dobimo iz nje s premikom in raztegom.

Rotacijska ploskev v $\mathbb{R}_{(x,y,z)}^3$, ki jo dobimo z rotacijo verižnice okrog x -osi, je *minimalna ploskev*, ki se imenuje *katenuida*:

$$y^2 + z^2 = \cosh^2 x.$$

Rjasta katenoida, najdena na dnu morja

Da je katenoida minimalna ploskev (to je ploskev, ki lokalno minimizira ploščino) je odkril *Leonhard Euler* (1744). Katenoida je ena najpomembnejših primerov minimalnih ploskev v literaturi.



$$x^2 + y^2 = \cosh^2 z$$

Helikoid

Drugi osnovni primer minimalne ploskve je *helikoid* (*Archimedova spirala*), ki ga dobimo, če premico vrtimo in obenem dvigamo s konstantno hitrostjo.



Več o minimalnih ploskvah v nadaljevanju.

Primer 2: Brahistokrona

(grško: *brahistos kronos* = najkrajši čas)

V ravnini $\mathbb{R}^2$ s koordinatama (x, y) sta dani točki

$$A = (a, a'), \quad B = (b, b'), \quad a < b, \quad a' > b'.$$

Naj bo $C \subset \mathbb{R}^2$ krivulja s krajišči A in B . Kroglica na začetku miruje v točki A , nato pa potuje po krivulji C od A do B pod vplivom gravitacije in brez trenja.

Naloga: poišči krivuljo C , pri kateri je čas potovanja $T = T(C)$ najmanjši. Ta problem je postavil in rešil *Johann Bernoulli* (1697).

Smiselno je predpostaviti, da je iskana krivulja graf odvedljive funkcije

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad f(a) = a', \quad f(b) = b',$$

ki zadošča $f'(a) < 0$ in $f(x) < a'$ za vsak $a < x \leq b$ (v nasprotnem primeru ne bi nikoli dosegla točke B). Naj bo $(x(t), y(t)) \in C$ položaj točke v času $t \geq 0$, kjer je $(x(0), y(0)) = A$. Hitrost je $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ in skalarna hitrost je

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2} \dot{x}(t), \quad v(0) = 0.$$

Točka se giblje od leve proti desni, zato je $\dot{x} \geq 0$.

Enačba za čas potovanja

Zakon o ohranitvi energije ter predpostavka o breztremskem gibanju pove, da je vsota kinetične in potencialne energije konstantna:

$$\frac{v(t)^2}{2} + gy(t) = \frac{v(0)^2}{2} + gy(0), \quad t \geq 0.$$

Ker je $y(t) = f(x(t))$, $y(0) = f(a)$, $v(0) = 0$, iz te in prejšnje enačbe sledi

$$v(t) = \sqrt{2g(f(a) - f(x(t)))} = \sqrt{1 + f'(x)^2} \dot{x}(t) = \sqrt{1 + f'(x)^2} \frac{dx}{dt}.$$

Torej je

$$dt = \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2g(f(a) - f(x))}} dx$$

in čas potovanja kroglice od začetne točke A do končne točke B je enak

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(a) - f(x)}} dx.$$

Iščemo torej funkcijo $y = f(x)$ na $[a, b]$ z danimi robnimi vrednostmi, pri kateri ta integral doseže najmanjšo vrednost.

Obnašanje v levem krajišču

Na tem mestu opazimo naslednje. Integral za T načeloma izgleda singularen v levem krajišču zaradi izraza $\sqrt{f(a) - f(x)}$ v imenovalcu. Singularen bi bil v primeru, ko bi veljalo

$$f(a) \geq f(x) \geq f(a) - O((x - a)^2),$$

$$\sqrt{f(a) - f(x)} \leq C|x - a|, \quad \frac{1}{\sqrt{f(a) - f(x)}} \geq \frac{1}{C|x - a|}.$$

Vendar ta primer ni realističen, saj bi pomenil neskončen čas potovanja kroglice.

Konkretno, iz enačbe za $v(t)$ bi dobili diferencialno neenačbo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2g(f(a) - f(x(t)))}}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}} \leq \frac{c|x(t) - a|}{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}} \leq c|x(t) - a|$$

v okolici $t = 0$. Z integracijo neenakosti $\dot{x}(t) \leq c|x(t) - a|$ in upoštevanjem $x(0) = a$ sledi (kot v dokazu Grönwallove leme), da je $x(t) \equiv a$ edina rešitev. To pomeni, da kroglica ostane v mirovanju v levem krajišču.

Poenostavitev problema

Koordinate (x, y) lahko izberemo tako, da je $A = (0, 0)$. Z uvedbo spremenljivke $z = -y \geq 0$ problem prevedemo na iskanje minimuma integrala

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{\sqrt{z}} dx$$

med zveznimi funkcijami $z : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $z(0) = 0$, $z(b) = z_0 > 0$, ki so zvezno odvedljive na $(0, b]$. Videli bomo, da ima rešitev v levem krajišču $x = 0$ vertikalno tangento (neskončen odvod). Lagrangian

$$L(z, z') = \sqrt{1 + z'^2} / \sqrt{z}$$

je neodvisen od spremenljivke x , zato se Euler-Lagrangejeva enačba reducira na Beltramijev pogoj

$$L - z' L_{z'} = \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{\sqrt{z}} - z' \frac{z'}{\sqrt{z(1 + z'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{z(1 + z'^2)}} = C \in \mathbb{R}$$

oziroma

$$z(1 + z'^2) = 2C \in \mathbb{R} \quad (\text{za neko drugo vrednost konstante}).$$

Rešitev problema brahistohrone

To enačbo rešimo parametrično z nastavkom

$$z' = \frac{dz}{dx} = \tan u, \quad 1 + z'^2 = 1 + \tan^2 u = 1/\cos^2 u$$

$$z = \frac{2C}{1 + z'^2} = 2C \cos^2 u = C(1 + \cos 2u)$$

$$-2C \sin 2u = \frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{du} = \tan u \frac{dx}{du}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{-4C \sin u \cos u}{\tan u} = -2C(1 + \cos 2u)$$

$$x = -C(2u + \sin 2u) + D, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Če uvedemo parameter $\tau = \pi - 2u$ ter izberemo $D = \pi C$ (s tem zagotovimo, da je $x(0) = 0$), dobimo

$$x = C(\tau - \sin \tau), \quad z = C(1 - \cos \tau), \quad y = -z = C(\cos \tau - 1).$$

To je cikloida. Parameter $C > 0$ izberemo tako, da zadostimo robnemu pogoju $y(b) = y_0 < 0$ v desni točki intervala.

Primer 3: Krivulje najmanjše dolžine

Naj bo ploskev $S \subset \mathbb{R}^3$ podana kot graf

$$S = \{(x, y, z) : z = x^2/2\}.$$

Poišči pot najmanjše dolžino na S od $A(-1, 0, 1/2)$ do $B(1, 1, 1/2)$.

Glede na naravo problema je smiselno iskati minimum med potmi, ki vsako ravnino $x = \text{const}$ sekajo le enkrat, zato lahko privzamemo, da je y funkcija x , $y = y(x)$, $x \in [-1, +1]$. Tretja komponenta poti je

$$z(x) = x^2/2, \quad z'(x) = x.$$

Dolžina poti je

$$\mathcal{L}(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'^2 + x^2} dx.$$

Prirejeni Lagrangian

$$L(x, y, y') = \sqrt{1 + x^2 + y'^2}, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

je neodvisen od y , zato se Euler-Lagrangejeva enačba reducira na

$$L_{y'}(x, y') = C \in \mathbb{R}.$$

Rešitev

$$L_{y'}(x, y') = \frac{y'}{\sqrt{1 + x^2 + y'^2}} = C$$

$$y'^2 = C^2(1 + x^2 + y'^2)$$

$$y' = c\sqrt{1 + x^2}, \quad c = C/\sqrt{1 - C^2}.$$

$$y(x) = c \int_{-1}^x \sqrt{1 + t^2} dt, \quad y(1) = c \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2} dt = 1.$$

Slednja enačba določi konstanto c .

Izračun integrala

$$\begin{aligned} t &= \sinh u, & dt &= \cosh u \, du \\ \sqrt{1+t^2} &= \sqrt{1+\sinh^2 u} = \sqrt{\cosh^2 u} = \cosh u \\ \sqrt{1+t^2} dt &= \cosh^2 u \, du = \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{-2u} + 2) du \\ \int \sqrt{1+t^2} dt &= \frac{1}{8}(e^{2u} - e^{-2u} + 4u) = \frac{1}{4} \sinh 2u + \frac{u}{2} + C. \end{aligned}$$

16. predavanje: Geodetke – krivulje z najmanjšo dolžino

V tem predavanju bomo uporabili metode variacijskega računa za izračun diferencialne enačbe za *geodetke* v poljubni *Riemannovi metriki* na $\mathbb{R}^n$. Geodetke so krivulje z (lokalno) najmanjšo dolžino. Analiza takih krivulj je ena od pomembnih tem *diferencialne geometrije*.

Riemannova metrika podaja način merjenja dolžin vektorjev in kotov med njimi. Natančno, Riemannova metrika g na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ je predpis, ki v vsaki točki $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ podaja skalarni produkt $g_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Tak skalarni produkt je podan s simetrično pozitivno definitno matriko

$$G(\mathbf{x}) = (g_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^n, \quad g_{ij} = g_{ji}$$

in je definiran na paru vektorjev $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ z

$$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = G(\mathbf{x})\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = G(\mathbf{x})\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x})v_i w_j.$$

Uvedemo oznako za normo vektorja:

$$\|\mathbf{v}\|_g^2 = g_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x})v_i v_j.$$

Simbolično pišemo $g_{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x})dx_i dx_j$.

Nekaj primerov Riemannovih metrik

Primer 1: Evklidska metrika je podana z identično matriko $G(\mathbf{x}) = \text{Id}$; torej je $g_{\mathbf{x}}$ običajen evklidski skalarni produkt, ki ni odvisen od bazne točke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \quad g = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2 = ds^2.$$

Primer 2: Če je $D \subset \mathbb{R}_{(u,v)}^2$ domena in $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka imerzija, je prva fundamentalna forma ploskve $S = \mathbf{x}(D) \subset \mathbb{R}^n$ enaka

$$g_{(u,v)} = |\mathbf{x}_u|^2 du^2 + 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) du dv + |\mathbf{x}_v|^2 dv^2; \quad G = \begin{pmatrix} |\mathbf{x}_u|^2 & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v & |\mathbf{x}_v|^2 \end{pmatrix}.$$

Za poljuben par vektorjev $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ velja

$$g_{(u,v)}(\xi, \eta) = d\mathbf{x}(u, v)\xi \cdot d\mathbf{x}(u, v)\eta.$$

Vektorja ξ, η na $\mathbb{R}^2$ torej *potisnemo naprej* na $\mathbb{R}^n$ z diferencialom $d\mathbf{x}(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ in vzamemo njun evklidski skalarni produkt. Pravimo, da smo evklidsko metriko na $\mathbb{R}^n$ povlekli nazaj z imerzijo $\mathbf{x}$:

$$g = \mathbf{x}^*(ds^2) = |dx_1|^2 + |dx_2|^2 + \cdots + |dx_n|^2.$$

Izometrije in Nashev vložitveni izrek

To idejo lahko uporabimo za poljubno imerzijo $\mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$.

Analogno definiramo pojem *izometrije*. Naj bosta g in g' Riemannovi metriki na domenah $D, D' \subset \mathbb{R}^n$. Difeomorfizem $f : D \rightarrow D'$ se imenuje *izometrija* med danim parom metrik, če velja

$$g'_{f(\mathbf{x})}(df_{\mathbf{x}}\mathbf{v}, df_{\mathbf{x}}\mathbf{w}) = g_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{x} \in D, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n.$$

Izometričnih metrik v diferencialni geometriji med seboj ne ločimo.

Eden najpomembnejših rezultatov diferencialne geometrije je naslednji izrek, ki ga je dokal *John Nash (1956)* (The beautiful mind).

Izrek (Nashev vložitveni izrek). Za vsako domeno $D \subset \mathbb{R}^n$ z gladko Riemannovo metriko g obstaja gladka vložitev $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ za nek dovolj velik $N = N(n) \in \mathbb{N}$, tako da je

$$g = f^*(ds^2) = f^*(dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_N^2) = |df_1|^2 + \cdots + |df_N|^2.$$

Torej je g povlek Riemannove metrike na $\mathbb{R}^N$ z vložitvijo f

(prva fundamentalna forma vložene ploskve $S = f(D) \subset \mathbb{R}^N$).

Izrek velja v splošnejšem primeru, ko je (D, g) *Riemannova mnogoterost*, to je gladka mnogoterost opremljena z Riemannovo metriko g .

Primer 3: Sferična metrika na $\mathbb{R}^n$ je podana z

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^2} \text{Id}, \quad g_{\mathbf{x}} = \frac{1}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2.$$

To metriko dobimo tako, da enotno sfero $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stereografsko projiciramo na $\mathbb{R}^n$ iz severnega pola $N = (0, \dots, 0, 1)$; preslikava $g : S^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n$ je difeomorfizem. Če Riemannovo metriko na $\mathbb{R}^{n+1}$ povlečemo na $\mathbb{R}^n$ z $g^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$ (kot v primeru 2), dobimo zgornjo formulo.

Primer 4: Poincaréjeva metrika na enotni krogli $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ je metrika

$$g_{\mathbf{x}} = \frac{1}{(1 - |\mathbf{x}|^2)^2} \sum_{i=1}^n (dx_i)^2, \quad |\mathbf{x}| < 1.$$

Krogla $\mathbb{B}^n$ s to metriko je model *hiperboličnega prostora*; to je prostor z metriko konstantne negativne ukrivljenosti (konkretno, -4).

Še posebej je zanimiv *Poincaréjev disk*, to je enotni disk $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ s Poincaréjevo metriko. *Schwarz-Pickova lema* pove, da so holomorfni avtomorfizmi diska

$$\mathbb{D} \ni z \mapsto f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R}$$

izometrije $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ Poincaréjeve metrike, ki ohranjajo orientacijo.

Konformno ekvivalentne metrike in izotermalne koordinate

V obeh zgornjih primerih je dobljena metrika g oblike

$$g = \lambda ds^2 = \lambda \sum_{i=1}^n dx_i^2$$

za neko pozitivno funkcijo $\lambda > 0$ na domeni. Pravimo, da je taka metrika g *konformno ekvivalentna* evklidski metriki ds^2 . To pomeni, da se spremenijo samo dolžine vektorjev, kot med njimi pa se ohranjajo.

Splošneje, Riemannovi metriki g, g' na $D \subset \mathbb{R}^n$ sta konformno ekvivalentni, če velja $g' = \lambda g$ za neko pozitivno funkcijo $\lambda > 0$ na D . V tej zvezi je zanimiv naslednji izrek, ki ga je posebnih primerih dokazal že C. F. Gauss:

Izrek. Za vsako gladko Riemannov metriko g na disku $D \subset \mathbb{R}^2$ s koordinatami (x, y) obstaja difeomorfizem $f : D \rightarrow D$ (zamenjava koordinat), tako da je

$$f^*g = \lambda(dx^2 + dy^2)$$

za neko gladko pozitivno funkcijo $\lambda > 0$ na D .

Konformni izomorfizmi

V novih koordinatah je torej metrika konformno ekvivalentna evklidski metriki. Take koordinate (x, y) se imenujejo *izotermalne koordinate* za dano metriko g . Matrika G take metrike λds^2 je

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \text{Id}.$$

Difeomorfizmi, ki ohranjajo to obliko metrike (in samo spremenijo funkcijo λ), so *konformni difeomorfizmi*, kar pomeni, da ohranjajo kote med vektorji, ne pa nujno njihovih dolžin.

Iz osnovne kompleksne analize vemo, da so konformni difeomorfizmi med domenami v $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ravno biholomorfne preslikave (če ohranjajo orientacijo) ali pa njihove kompleksne konjugiranke (če orientacijo obrnejo).

Dolžina poti

Naj bo

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}) dx_i dx_j$$

Riemannova metrika na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : [a, b] \rightarrow D$ zvezno odvedljiva pot. Njena dolžina v metriki g je

$$\ell_g(\mathbf{x}) = \int_a^b \sqrt{g_{\mathbf{x}(t)}(\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t)} dt.$$

Podobno kot v evklidskem primeru si ogledamo dolžino poti od $t = a$ do variabilnega časa $t \in [a, b]$:

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\|_{g(\mathbf{x}(\tau))} d\tau = \int_a^t \sqrt{g_{\mathbf{x}(\tau)}(\dot{\mathbf{x}}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau))} d\tau.$$

Torej je

$$\dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_{g(\mathbf{x}(t))} \geq 0,$$

zato je $s(t)$ monoton naraščajoča funkcija $s : [a, b] \rightarrow [0, \ell_g(\mathbf{x})]$.

Naravni parameter poti

Če je $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0$ za vsak $t \in [a, b]$ (v tem primeru pravimo, da je pot *regularna* ali *imerzirana*), je funkcija $s(t)$ strogo naraščajoča in lahko izrazimo t kot funkcijo s , $t = t(s)$. Če sedaj definiramo pot

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(t(s)), \quad s \in [0, \ell(\mathbf{x})],$$

(torej smo pot $\mathbf{x}(t)$ reparametrizirali), dobimo

$$\mathbf{y}'(s) = \dot{\mathbf{x}}(t(s))t'(s) = \frac{1}{\dot{s}(t)}\dot{\mathbf{x}}(t(s))$$

in zato

$$\|\mathbf{y}'(s)\|_{g(\mathbf{y}(s))} = \frac{1}{\dot{s}(t)}\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_{g(\mathbf{x}(t))} = 1.$$

Torej ima hitrostni vektor poti $\mathbf{y}(s)$ v vsaki točki dolžino ena. Pravimo, da je s *naravni parameter* na poti $\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(t(s))$.

V nadaljevanju lahko brez izgube splošnosti obravnavamo poti z naravnim parametrom.

Poti minimalne dolžine — geodetke

Naloga: poišči pot najmanjše dolžine med dvema točkama.

Gladke poti (razreda $\mathcal{C}^2$), ki na vsakem dovolj kratkem segmentu minimizirajo dolžino poti med krajiščema, se imenujejo *geodetke*.

Videli bomo, da lokalno obstaja natanko ena geodetka skozi dano točko p s predpisanim hitrostnim vektorjem $\mathbf{v}$ v tej točki. Če spremenimo velikost hitrostnega vektorja (ne pa tudi smer), se spremeni parametrizacija, dobimo pa isto krivuljo. Geodetke v različnih smereh napolnijo *geodetski disk*.

Globalno lahko med dvema točkama obstaja več geodetk. Npr., geodetke na sferi $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ so preseki sfere s hiperravninami skozi $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dve točki sfere določata natanko eno sklenjeno geodetko, torej dve geodetki različnih dolžin, razen če sta antipodni in tedaj določata šop geodetk. Poti letal med dvema točkama na sferi v principu sledijo geodetki, razen za morebitne modifikacije zaradi vetrov, vojaških spopadov, izbruhov vulkanov, ...

Geodetke na Poincaréjevem disku $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ so loki na krožnicah, ki sekajo robno krožnico $b\mathbb{D} = \{x^2 + y^2 = 1\}$ pravokotno.

Sedaj bomo z Lagrangejevo variacijsko metodo poiskali diferencialno enačbo 2. reda za geodetke v poljubni Riemannovi metriki na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$.

Postavitev problema

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ domena in

$$g_{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}) dx_i dx_j, \quad \mathbf{x} \in D$$

neka Riemannova metrika na D . Naj bo $\mathbf{x}(t) \in D$ dvakrat zvezno odvedljiva pot na intervalu $t \in [0, b]$, parametrizirana z naravnim parametrom, torej je

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_{g_{\mathbf{x}(t)}} = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t) \equiv 1.$$

Vzemimo poljubno $\mathcal{C}^2$ pot

$$\mathbf{h} : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{h}(b) = 0$$

in si oglejmo dolžino poti $\mathbf{x}(t) + s\mathbf{h}(t)$ za majhne vrednosti parametra $s \in \mathbb{R}$.

Najprej izračunajmo linearni člen norme $\|\mathbf{x}(t) + s\mathbf{h}(t)\|_g^2$ v spremenljivki s .

Prva variacija norme tangentnega vektorja

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{x}}(t) + s\dot{\mathbf{h}}(t)\|_{g_{\mathbf{x}(t)+s\mathbf{h}(t)}}^2 &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}(t) + s\mathbf{h}(t)) (\dot{x}_i(t) + s\dot{h}_i(t)) (\dot{x}_j(t) + s\dot{h}_j(t)) \\ &= \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_{g_{\mathbf{x}(t)}} + 2s \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i(t) \dot{h}_j(t) \\ &\quad + s \sum_{l=1}^n h_l(t) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t) + O(s^2). \end{aligned}$$

Odtod dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \|\dot{\mathbf{x}}(t) + s\dot{\mathbf{h}}(t)\|_{g_{\mathbf{x}(t)+s\mathbf{h}(t)}}^2 &= 2 \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i(t) \dot{h}_j(t) \\ &\quad + \sum_{l=1}^n h_l(t) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i(t) \dot{x}_j(t). \end{aligned}$$

Prva variacija dolžine

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \ell_g(\mathbf{x} + s\mathbf{h}) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_0^b \sqrt{\|\dot{\mathbf{x}}(t) + s\dot{\mathbf{h}}(t)\|_g^2} dt \\ &= \int_0^b \frac{\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \|\dot{\mathbf{x}}(t) + s\dot{\mathbf{h}}(t)\|_g^2}{2\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_g} dt \\ &= \int_0^b \left(\sum_{i,l=1}^n g_{il}(\mathbf{x}) \dot{x}_i \dot{h}_l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n h_l \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \dot{x}_i \dot{x}_j \right) dt \\ &= \sum_{l=1}^n \int_0^b \left(\sum_{i=1}^n g_{il}(\mathbf{x}) \dot{x}_i \dot{h}_l + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \dot{x}_i \dot{x}_j h_l \right) dt. \end{aligned}$$

To velja za vse poti $\mathbf{h}$ z ničelnimi vrednostmi v krajiščih. Iz Razmadzejeve leme (oz. z integracijo prvega člena v zgornjem integralu per partes) sledi

$$2 \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n g_{il}(\mathbf{x}(t)) \dot{x}_i - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}(\mathbf{x}(t))}{\partial x_l} \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad l = 1, \dots, n.$$

Prvi člen na levi v zgornji formuli je enak

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n g_{il}(\mathbf{x}(t)) \ddot{x}_i + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{il}(\mathbf{x}(t))}{\partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j \\ = 2 \sum_{i=1}^n g_{li}(\mathbf{x}(t)) \ddot{x}_i + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j}(\mathbf{x}(t)) \right) \dot{x}_i \dot{x}_j \end{aligned}$$

Vstavimo v prejšnjo formulo in dobimo za vsak $l = 1, \dots, n$ enačbo

$$2 \sum_{i=1}^n g_{li} \ddot{x}_i + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) \dot{x}_i \dot{x}_j = 0.$$

Označimo z $G^{-1} = (g^{ij})$ inverzno matriko matrike $G = (g_{ij})$. Pomnožimo enačbo z g^{kl} in seštejemo po l ter upoštevajmo $\sum_{l=1}^n g^{kl} g_{li} = \delta_{ik}$:

$$\ddot{x}_k + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Diferencialna enačba geodetsk

Koeficienti

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

se imenujejo **Christoffelovi simboli**; to so funkcije bazne točke $\mathbf{x}$, ki se naravno pojavijo pri kovariantnih odvodih v *Levi-Civita povezavi* (connection), ki pripada metriki g . (Glej M.P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, str. 55.)

Diferencialna enačba geodetsk v Riemannovi metriki $g = (g_{ij})$ je torej

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\mathbf{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

To je sistem navadnih kvazilinearnih diferencialnih enačb drugega reda, ki so kvadratično homogene: če je $\mathbf{x}(t)$ rešitev, je tudi $\mathbf{x}(ct)$ rešitev za vsak $c \in \mathbb{R}$.

Geometrijsko ta sistem enačb pomeni, da ima pot $\mathbf{x}(t)$ pospešek (drugi odvod) enak 0 v smislu kovariantnega odvoda:

$$\nabla_{\dot{\mathbf{x}}(t)} \dot{\mathbf{x}}(t) \equiv 0.$$

Glej M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, str. 62. Odtod sledi tudi, da ima vsaka rešitev konstantno hitrost $\|\dot{\mathbf{x}}(t)\|_g = \text{const.}$

Geodetska krogl

Eksistenčni izrek pove, da za vsako točko $\mathbf{p} \in D \subset \mathbb{R}^n$ in vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ obstaja natanko ena (lokalna) geodetka

$$(-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto \gamma(t; \mathbf{p}, \mathbf{v}); \quad \gamma(0; \mathbf{p}, \mathbf{v}) = \mathbf{p}, \quad \dot{\gamma}(0; \mathbf{p}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

Iz diferencialne enačbe sledi naslednja lastnost homogenosti:

$$\gamma(t; \mathbf{p}, c\mathbf{v}) = \gamma(ct; \mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Torej zadošča opazovati geodetke s hitrostnimi vektorji $\mathbf{v}$ na enotni g -sferi $S = \{\|\mathbf{v}\|_{g_{\mathbf{p}}} = 1\} \subset T_{\mathbf{p}}\mathbb{R}^n$. Za dovolj majhen $r > 0$ so tedaj vse geodetke $\gamma(t; \mathbf{p}, \mathbf{v})$ ($\mathbf{v} \in S$) definirane na intervalu $t \in [-r_0, r_0]$. Preslikava

$$\exp_{\mathbf{p}}(t\mathbf{v}) = \gamma(t; \mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in S, \quad t \in [0, r_0]$$

je difeomorfizem metrične krogle $B_{r_0} = \{t\mathbf{v} : \mathbf{v} \in S, t \in [0, r_0]\}$ polmera r_0 na geodetsko kroglo $\exp_{\mathbf{p}}(B_{r_0}) \subset D$. Radialni polmeri krogle B_{r_0} se preslikajo v paroma disjunktne geodetske loke od $\mathbf{p}$ do robnih točk sfere $\exp_{\mathbf{p}}(r_0 S)$.

Dokaz dejstva, da geodetke lokalno minimizirajo dolžino, lahko najdemo v do Carmo, *Riemannian Geometry*, Proposition 3.6, str. 70.

Metrike, konformno ekvivalentne evklidski metriki

Izračunajmo Christoffelove koeficiente

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

v primeru, ko je $g = \mu(\mathbf{x}) \sum_i dx_i^2$ konformno ekvivalentna evklidski metriki:

$$g_{ii} = \mu > 0, \quad g^{ii} = 1/\mu, \quad g_{ij} = 0 = g^{ij} \quad \text{za } i \neq j.$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right).$$

Naj bo $n = 2$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \\ -\Gamma_{11}^2 &= \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \end{aligned}$$

V matrični obliki:

$$\Gamma^1 = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \mu_{x_1} & \mu_{x_2} \\ \mu_{x_2} & -\mu_{x_1} \end{pmatrix} \quad \Gamma^2 = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} -\mu_{x_2} & \mu_{x_1} \\ \mu_{x_1} & \mu_{x_2} \end{pmatrix}$$

Enačba geodetk:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \frac{1}{2\mu} (\mu_{x_1}^2 (\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) - 2\mu_{x_2}^2 \dot{x}_1 \dot{x}_2) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{1}{2\mu} (\mu_{x_2}^2 (\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) - 2\mu_{x_1}^2 \dot{x}_1 \dot{x}_2) &= 0\end{aligned}$$

Enačba geodetk v sferični metriki

Sferična metrika:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}, & \frac{1}{2\mu} &= \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)^2 \\ \mu_x &= -\frac{4x}{(1+x^2+y^2)^3}, & \mu_y &= -\frac{4y}{(1+x^2+y^2)^3} \\ \frac{1}{2\mu}\mu_x^2 &= \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^4}, & \frac{1}{2\mu}\mu_y^2 &= \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^4}\end{aligned}$$

Enačba geodetk metrike $g = \mu \cdot (dx^2 + dy^2)$:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{8x^2}{(1+x^2+y^2)^4}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - \frac{16y^2}{(1+x^2+y^2)^4}\dot{x}\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{8y^2}{(1+x^2+y^2)^4}(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) - \frac{16x^2}{(1+x^2+y^2)^4}\dot{x}\dot{y} &= 0.\end{aligned}$$

Geodetke sferične metrike skozi $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$

Če izberemo $y = 0$, dobimo naslednjo enačbo za x :

$$\ddot{x} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^4}\dot{x}^2 = 0.$$

Ta enačba drugega reda ima natančno eno rešitev z $x(0) = 0$ in $\dot{x}(0) = v \in \mathbb{R}$. Dobimo parametrizacijo x osi, torej je x os geodetka.

Analogen argument pokaže, da je y os geodetka.

Splošneje, če izberemo vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ in iščemo rešitve oblike

$$x(t) = h(t)v_1, \quad y(t) = h(t)v_2,$$

dobimo diferencialno enačbo 2. reda za funkcijo $h(t)$; njena rešitev podaja geodetsko parametrizacijo premice $\mathbb{R}\mathbf{v} \subset \mathbb{R}^2$. Te premice pri stereografski projekciji sfere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ na ravnino $\mathbb{R}^2$ ustrezajo poldnevnikom na S^2 skozi severni pol $(0, 0, 1)$ in južni pol $(0, 0, -1)$.

Geodetko skozi poljubno točko $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ v smeri vektorja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ dobimo z upoštevanjem dejstva, da so ortogonalne rotacije sfere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ izometrije v evklidski metriki. Zato so preseki sfere z ravninami skozi $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ geodetke. Pri stereografski projekciji $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se te krožnice preslikajo v krožnice na $\mathbb{R}^2$. (Seveda pa niso vse krožnice v $\mathbb{R}^2$ geodetke!)

Enačba geodetk v Poincaréjevi metriki

Poincaréjeva metrika na disku $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{(1 - (x^2 + y^2))^2}, & \frac{1}{2\mu} &= \frac{1}{2}(1 - (x^2 + y^2))^2 \\ \mu_x &= \frac{4x}{(1 - (x^2 + y^2))^3}, & \mu_y &= \frac{4y}{(1 - (x^2 + y^2))^3} \\ \frac{1}{2\mu}\mu_x^2 &= \frac{8x^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}, & \frac{1}{2\mu}\mu_y^2 &= \frac{8y^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}\end{aligned}$$

Enačba geodetk Poincaréjeve metrike:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{8x^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - \frac{16y^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}\dot{x}\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{8y^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) - \frac{16x^2}{(1 - (x^2 + y^2))^4}\dot{x}\dot{y} &= 0.\end{aligned}$$

Geodetke Poincaréjeve metrike

Podobno kot pri enačbi za geodetke sferične metrike vidimo, da so preseki premic skozi $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ z diskom $\mathbb{D} = \{x^2 + y^2 < 1\}$ geodetke Poincaréjeve metrike.

Nadalje upoštevamo, da so holomorfní avtomorfizmi diska

$$z = x + iy \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

izometrije Poincaréjeve metrike, kot sledi iz Schwarz-Pickove leme. Torej te Möbiusove preslikave preslikajo geodetke v geodetke.

Po drugi strani vemo (Analiza 2), da vsaka Möbiusova preslikava preslika krožnice v krožnice, pri čemer premico razumemo kot krožnico skozi ∞ . Vemo tudi, da so biholomorfne preslikave konformne (ohranjajo kote).

Zaključimo, da so geodetke Poincaréjeve metrike na disku $\mathbb{D}$ preseki z $\mathbb{D}$ tistih krožnic v $\mathbb{C}$, ki sekajo enotno krožnico $\partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$ pravokotno.

Polravnina Lobachevskega

Polravnina Lobachevskega je drug model za Poincaréjev disk.

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad g_L = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Naloga Preveri, da se $(\mathbb{H}, g_L)$ izometrično preslika na Poincaréjev disk $(\mathbb{D}, g_P)$ s preslikavo

$$z = x + iy \mapsto \frac{z - i}{z + i} \in \mathbb{D}.$$

Sedaj je

$$\mu = \frac{1}{y^2}, \quad \mu_x = 0, \quad \mu_y = -\frac{2}{y^3}, \quad \frac{1}{\mu}\mu_y^2 = y^2 \frac{4}{y^6} = \frac{4}{y^4}.$$

Enačba geodetk:

$$\ddot{x} - \frac{4}{y^4}\dot{x}\dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + \frac{2}{y^4}(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) = 0.$$

Geodetke so preseki preseki s $\mathbb{H}$ krožnic in premic v $\mathbb{R}^2$, ki pravokotno sekajo premico $\partial\mathbb{H} = \{y = 0\}$.

17. predavanje: Variacijski problemi s splošnejšimi robnimi pogoji

Do sedaj smo obravnavali problem iskanja ekstrema funkcionala

$$\mathcal{L}(x) = \int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt$$

pri robnih pogojih

$$x(a) = A, \quad x(b) = B.$$

V tem primeru so dopustne variacije v funkcije x vse funkcije iz prostora

$$V = \{v \in \mathcal{C}^2([a, b]) : v(a) = 0, v(b) = 0\}.$$

Opomba: Klasična oznaka za variacijo je $v = \delta x$. V bistvu so to tangentni vektorji v dani točki x na prostor funkcij, v katerem leži x . Npr., če je to prostor $\{x \in \mathcal{C}^2([a, b]) : x(a) = A, x(b) = B\}$, je tangentni prostor v x zgoraj naveden prostor funkcij v z robnimi vrednostmi 0.

Euler-Lagrangejeva enačba

$$L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad t \in [a, b]$$

velja pod pogojem, da so vse variacije, ki so na krajiščih intervala enake nič, dopustne. Za take variacije sta robna člena v integraciji per partes enaka nič.

Izpeljava Euler-Lagrangejeve enačbe

Ključni del izpeljave Euler-Lagrangejeve enačbe je bil naslednji. Velja:

$$\begin{aligned} (\nabla_v \mathcal{L})(x) &= \int_a^b \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(t, x(t) + sv(t), \dot{x}(t) + s\dot{v}(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} L(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{v}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Denimo, da sta funkciji x in L razreda $\mathcal{C}^2$. Tedaj je $L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ zvezno odvedljiva po t in lahko drugi člen na desni strani integriramo per partes:

$$\int_a^b L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \dot{v}(t) dt = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) dt + L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) v(t) \Big|_a^b.$$

Formula za smerni odvod (1. variacija v smeri v) je torej

$$\begin{aligned} (\nabla_v \mathcal{L})(x) &= \int_a^b \left(L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{\partial}{\partial t} L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \right) v(t) dt \\ &\quad + L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) v(t) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Primeri splošnejših robnih pogojev

Recimo sedaj, da obravnavamo isti variacijski problem pri splošnejših linearnih robnih pogojih oblike

$$r_k(x) = \alpha_k x(a) + \beta_k \dot{x}(a) + \gamma_k x(b) + \delta_k \dot{x}(b) = a_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Pri linearnih robnih pogojih te oblike še vedno velja, da so vse variacije v , ki so na krajiščih intervala enake nič, dopustne. Odtod dobimo tako kot prej, da mora vsaka ekstremalna funkcija zadoščati Euler-Lagrangejevi enačbi.

Vendar je lahko dopustnih variacij več: poleg tistih z robnimi vrednostmi 0 so sedaj dopustne vse variacije v , ki zadoščajo pogojem

$$r_k(v) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Pri teh dodatnih variacijah ni več samoumevno, da bi bil integrirani člen pri integraciji per partes enak nič; to moramo posebej zahtevati:

$$L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))v(t) \Big|_a^b = 0 \quad \text{za vse dopustne variacije } v.$$

Preveč robnih pogojev seveda škodi v smislu, da tak problem pogosto nima rešitev. Naravno je predpisati največ dva robna pogoja, saj je Euler-Lagrangejeva enačba drugega reda in ima dva prosta parametra.

Naravni primeri robnih pogojev

Poleg že obravnavega sta dva najbolj pogosta primera naslednja:

- (1) Robnega pogoja v eni ali obeh robnih točkah ni. Npr., vrednost $x(b)$ je poljubna, vrednost $x(a) = A$ pa fiksna. Sedaj se dopustne vse variacije

$$v \in \mathcal{C}^2([a, b]), \quad v(a) = 0.$$

Vrednost $v(b)$ je poljubna in če vzamemo $v(b) = 1$, dobimo poleg Euler-Lagrangejeve enačbe še pogoj

$$L_{\dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)) = 0.$$

Odtod običajno sledi $\dot{x}(b) = 0$.

- (2) Če ni robnega pogoja v nobenem od krajišč, so dopustne vse variacije $v \in \mathcal{C}^2([a, b])$ in dobimo dodatna pogoja

$$L_{\dot{x}}(a, x(a), \dot{x}(a)) = 0, \quad L_{\dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)) = 0.$$

- (3) Če je edini robni pogoj $x(a) = x(b)$, so dopustne vse variacije $v \in \mathcal{C}^2([a, b])$, ki zadoščajo $v(a) = v(b)$. V tem primeru dobimo dodatni pogoj

$$L_{\dot{x}}(a, x(a), \dot{x}(a)) = L_{\dot{x}}(b, x(b), \dot{x}(b)).$$

Brahistokrona ponovno

V tej luči se povrnimo na problem brahistokrone, ki smo ga obravnavali v 15. predavanju. Kroglica pri času $t = 0$ miruje v izhodišču $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, nato pa začne padati po krivulji $y = y(x) < 0$ za $x \in (0, b]$. Zanimalo nas je, po kateri krivulji se naj giblje, da bo čim hitreje prispela na cilj v desno krajišče.

Problem je bil minimizirati funkcional

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^b \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{z}} dx,$$

kjer je $z = z(x) = -y(x) \geq 0$. Z uporabo variacij v , ki so na krajiščih intervala enake nič, smo ugotovili, da mora rešitev zadoščati Beltramijevi identiteti

$$L - z' L_{z'} = \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{\sqrt{z}} - z' \frac{z'}{\sqrt{z(1 + z'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{z(1 + z'^2)}} = C \in \mathbb{R}.$$

Če vrednosti v krajišču $x = b$ ne predpišemo, moramo dopustiti tudi variacije v z $v(0) = 0$ in $v(b) = 1$. S tem dobimo dodatni pogoj

$$L_{z'}|_{x=b} = \frac{z'(b)}{\sqrt{z(b)(1 + z'(b)^2)}} = 0 \iff z'(b) = 0.$$

Brahistokrona

V 15. predavanju smo videli, da so ekstremalne krivulje te Euler-Lagrangejeve enačbe cikloide

$$x = C(t - \sin t), \quad z = C(1 - \cos t), \quad y = -z = C(\cos t - 1)$$

za poljubno konstanto $C > 0$. Velja

$$z'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Pogoj $z'(b) = 0$ je torej ekvivalenten $\sin t = 0$. Prva rešitev s $t > 0$ je $t = \pi$. Vstavimo v $x(t)$ in dobimo

$$x(\pi) = C\pi = b, \quad C = \frac{b}{\pi}.$$

S tem je konstanta C (torej krivulja, po kateri kroglica najhitreje pada) natanko določena in višina padca je

$$y(b) = C(\cos \pi - 1) = -2C = -\frac{2b}{\pi}.$$

Dobljena krivulja je polovica prve zanke cikloide.

Katenoida

Za drugi primer si oglejmo naslednjo nalogo, povezano s katenoido.

V ravnini $x = 0$ v $\mathbb{R}^3$ je dana krožnica $y^2 + z^2 = A^2$. Radi bi jo povezali z ravnino $x = b > 0$ z rotacijsko ploskvijo minimalne ploščine.

Ustreden graf $y(x)$ na intervalu $[0, b]$ ima robno vrednost $y(0) = A > 0$, medtem ko vrednost v desnem krajišču ni predpisana. Iskana funkcija $y(x)$ minimizira integral

$$\mathcal{L}(y) = \int_0^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Prirejeni Lagrangian $L(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$ je neodvisen od x in problem se prevede na Beltramijevo identiteto:

$$L - y' L_{y'} = y \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \in \mathbb{R}.$$

Dodatni pogoj pri $x = b$ je

$$L_{y'}|_{x=b} = 0 \iff y'(b) = 0.$$

Katenoida

Ekstremalne krivulje, ki smo jih našli v 15. predavanju, so

$$y = C \cosh\left(\frac{x-D}{C}\right), \quad y'(x) = \sinh\left(\frac{x-D}{C}\right).$$

Pogoj $y'(b) = 0$ nam da $D = b$, pogoj $y(0) = A$ pa

$$C \cosh(b/C) = A.$$

Če pišemo $b/C = t$, je enačba

$$\cosh t = A/C = \lambda t, \quad \lambda = A/b.$$

Enačba $\cosh t = \lambda t$ ima dve rešitvi za $\lambda > \lambda_0$, eno dvojno rešitev za $\lambda = \lambda_0$ in nobene rešitve za $\lambda < \lambda_0$, kjer je

$$\lambda_0 \approx 1.50887954 \dots$$

Več tovrstnih problemov bomo obravnavali pri izoperimetričnih problemih.

18. predavanje: Variacijski problem za funkcije več spremenljivk

V tem predavanju si bomo ogledali variacijski problem za funkcionalne na funkcijah več spremenljivk. Glavne teme:

- Euler-Lagrangejeva enačba za funkcije več spremenljivk
- Lagrangejeva enačba minimalnih grafov
- Geometrijska interpretacija in pojem minimalne ploskve
- Konformno imerzirane ploskve in povezava s harmoničnostjo
- Enneper-Weierstrassova formula
- Galerija minimalnih ploskev

OPOMBA: Prvi del predavanja do enačbe minimalnih grafov, njene geometrijske interpretacije ter galerije minimalnih ploskev je v tem dokumentu. Več o minimalnih ploskvah najdete v ločenem tekstu z naslovom

Minimal surfaces for undergraduates

Osnovni problem

Naj bo D kompaktna domena v $\mathbb{R}^2$ z odsekoma zveznim robom in naj bo $L : D \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija razreda $\mathcal{C}^2(D)$ (Lagrangian).

Na prostoru funkcij $f \in \mathcal{C}^2(D)$ definiramo funkcional

$$\mathcal{L}(f) = \int_D L(x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)) dx dy.$$

Tako kot v osnovnem enorazsežnem primeru nas zanimajo stacionarne točke funkcionala $\mathcal{L}$, torej funkcije f s predpisano vrednostjo

$$f|_{\partial D} = u : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$$

na robu domene, pri katerih je prva variacija funkcionala enaka 0:

$$\nabla_v \mathcal{L}(f) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(f + sv) = 0 \quad \text{za vse } v \in \mathcal{C}^2(D) \text{ z } v|_{\partial D} = 0.$$

Izračunajmo prvo variacijo $\nabla_v \mathcal{L}(f)$.

Prva variacija

$$\begin{aligned}\nabla_v \mathcal{L}(f) &= \int_D \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} L(x, y, f + sv, f_x + sv_x, f_y + sv_y) dx dy \\ &= \int_D (L_f v + L_{f_x} v_x + L_{f_y} v_y) dx dy.\end{aligned}$$

Za fiksen $y \in \mathbb{R}$ označimo

$$I_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\}.$$

Ker je rob ∂D odsekoma gladek, je za večino vrednosti $y \in \mathbb{R}$ množica I_y unija končno mnogo kompaktnih intervalov ali pa prazna množica.

Ker je $v|_{\partial D} = 0$, dobimo z integracijo per partes

$$\int_{x \in I_y} L_{f_x} v_x dx = - \int_{x \in I_y} \frac{\partial}{\partial x} L_{f_x} \cdot v dx.$$

Če integriramo dobljeno identiteto po y , dobimo po Fubiniju

$$\int_D L_{f_x} v_x dx dy = - \int_D \frac{\partial}{\partial x} L_{f_x} \cdot v dx dy.$$

Analogno ugotovimo

$$\int_D L_{f_y} v_y dx dy = - \int_D \frac{\partial}{\partial y} L_{f_y} \cdot v dx dy.$$

Torej je

$$\nabla_v \mathcal{L}(f) = \int_D \left(L_f - \frac{\partial}{\partial x} L_{f_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{f_y} \right) v dx dy.$$

Ta izraz je enak nič za vse funkcije $v \in \mathcal{C}^2(D)$ z $v|_{\partial D} = 0$ natanko tedaj, ko f zadošča naslednji *Euler–Lagrangejevi enačbi*:

$$L_f - \frac{\partial}{\partial x} L_{f_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{f_y} = 0.$$

To je parcialna diferencialna enačba 2. reda za $f(x, y)$ z robnim pogojem $f|_{\partial D} = u$.

Primer: Lagrangejeva enačba minimalnih grafov

Problem: poiskati funkcijo $f \in \mathcal{C}^2(D)$ na kompaktni domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ z odsekoma gladkim robom z dano robno vrednostjo $f|_{\partial D} = u : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, pri kateri ima graf

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

najmanjšo ploščino

$$\text{Area}(G_f) = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

To je poseben primer *Plateaujevega problema*, ki sprašuje po ploskvah $S \subset \mathbb{R}^3$ z najmanjšo ploščino in predpisano sklenjeno robno krivuljo $\partial S \subset \mathbb{R}^3$.

Lagrangian je

$$L(x, y, f, f_x, f_y) = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

$$L_f = 0, \quad L_{f_x} = \frac{f_x}{L}, \quad L_{f_y} = \frac{f_y}{L}$$

Euler-Lagrangejeva enačba:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{L} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{L} = 0.$$

Lagrangejeva enačba minimalnih grafov

Če izračunamo odvode in pomnožimo enačbo z L^3 , dobimo

$$\begin{aligned} f_{xx}L^2 - f_xL\frac{\partial}{\partial x}L(x, y, f, f_x, f_y) + f_{yy}L^2 - f_yL\frac{\partial}{\partial y}L(x, y, f, f_x, f_y) &= \\ f_{xx}L^2 - f_xL(L_{f_x}f_{xx} + L_{f_y}f_{xy}) + f_{yy}L^2 - f_yL(L_{f_x}f_{xy} + L_{f_y}f_{yy}) &= 0. \end{aligned}$$

Upošteva je $L \cdot L_{f_x} = f_x$ in $L \cdot L_{f_y} = f_y$ dobimo

$$f_{xx}(L^2 - f_x^2) + f_{yy}(L^2 - f_y^2) - 2f_xf_yf_{xy} = 0$$

in nazadnje iz $L^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$:

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0.$$

To je *Lagrangejeva enačba minimalnih grafov*.

Geometrijska interpretacija enačbe minimalnih grafov

Kaj je naravna geometrična interpretacija enačbe minimalnih grafov?

Odgovor na to vprašanje je našel J. B. Meusnier leta 1976:

Izrek (Meusnier). Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^2$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ zadošča enačbi minimalnih grafov natanko tedaj, ko imam njen graf $G_f \subset \mathbb{R}^3$ povprečno ukrivljenost enako nič v vsaki točki:

$$H = \kappa_1 + \kappa_2 = 0.$$

Tu sta $\kappa_1, \kappa_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji na D , ki v vsaki točki predstavljata glavni normalni ukrivljenosti ploskve G_f (največjo in najmanjšo).

To pomeni, da je vsaka točka na minimalni ploskvi sedelna točka in njena Gaussova ukrivljenost

$$K = \kappa_1\kappa_2 = -\kappa_1^2 \leq 0$$

je nepozitivna funkcija na D .

Pojem povprečne ukrivljenosti je obrazložen v članku

F. Forstnerič, Minimal surfaces for undergraduates, razdelek 3. (Na učilnici.)

V razdelku 4 istega članka je podan dokaz zgornjega izreka (Izrek 4.1).

Opažanje

Poglejmo ponovno enačbo minimalnih grafov:

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_xf_yf_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0.$$

Če v neki notranji točki $(x_0, y_0) \in D \setminus \partial D$ velja

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0,$$

kar pomeni da je (x_0, y_0) kritična točka funkcije f , je v tej točki zgornja enačba ekvivalentna

$$\operatorname{div} \nabla f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) = 0$$

kjer je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplaceov operator. V taki točki (x_0, y_0) je grafna preslikava

$$(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$$

konformna, to je, ohranja kote, saj je njen diferencial v (x_0, y_0) preslikava $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$.

Minimalne ploskve in Laplaceov operator

To napeljuje na misel, da obstaja zveza med minimalnimi ploskvami in harmoničnimi funkcijami.

To v resnici drži, če izberemo konformno parametrizacijo dane ploskve $S \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in S \subset \mathbb{R}^3.$$

Tu je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ imerzija, ki parameterizira ploskev S .

Konformnost je ekvivalentna naslednjima dvema pogojema:

$$\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad |\mathbf{x}_u| = |\mathbf{x}_v|.$$

Iz izreka o obstoju izotermalnih koordinat sledi, da ima vsaka imerzirana ploskev konformno parametrizacijo.

(Seveda pa ni vsaka ploskev globalno parametrizirana z ravninsko domeno, zato argumenti v nadaljevanju veljajo lokalno.)

Osnovni izrek teorije minimalnih ploskev

Naslednji izrek je kombinacija izrekov 5.2 in 6.1 v zgoraj omenjenem članku F. F., Minimal surfaces for undergraduates. Rezultat sledi iz del Lagrangeja (1760) in Meusnierja (1776).

Izrek. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ domena z odsekoma gladkim robom. Konformna imerzija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ razreda $\mathcal{C}^2$ parametrizira minimalno ploskev v $\mathbb{R}^3$ (to je, $\mathbf{x}$ je stacionarna točka funkcionala ploščine pri fiksni vrednosti robne preslikave $\mathbf{x} : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^3$) natanko tedaj, ko je $\mathbf{x}$ harmonična preslikava

$$\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) = 0.$$

To velja natanko tedaj, ko je povprečna ukrivljenost ploskve identično nič.

Natančnejši rezultat (za imerzirane ploskve v $\mathbb{R}^n$ za poljuben $n \geq 3$) je izrek 6.3 v omenjenem članku, ki podaja zvezo med Laplaceom $\Delta \mathbf{x}$ in vektorjem povprečne ukrivljenosti (mean curvature vector) v vsaki točki ploskve.

V razdelku 7 je prikazana Enneper–Weierstrassova formula za minimalne ploskve (izrek 7.1), ki podaja povezavo s kompleksno analizo.

Razdelek 8 članka vsebuje nekaj eksplicitnih primerov in nekateri od njih so prikazani na ilustracijah v nadaljevanju tega predavanja.

Minimalne rotacijske ploskve

Pred tem si oglejmo preprostejši problem, pri katerem iščemo minimalne rotacijske ploskve. Naj bosta (x, y) koordinati na $\mathbb{R}^2$. V zgornji polravnini si izberemo dve točki

$$T_0(a, A), \quad T_1(b, B), \quad a < b, \quad A > 0, \quad B > 0.$$

Iščemo funkcijo $y = y(x) > 0$ na $[a, b]$ z $y(a) = A$, $y(b) = B$, tako da ima rotacijske ploskev v $\mathbb{R}^3$ z enačbo

$$y^2 + z^2 = y(x)^2, \quad a \leq x \leq b$$

minimalno ploščino. Njena ploščina je

$$P(y) = \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

To je isti problem kot primer 1 v predavanju 15, kjer smo iskali obliko prosto viseče verige pod vplivom gravitacije. Ugotovili smo, da so rešitve *verižnice* iz družine

$$y = C \cosh \frac{x - D}{C}, \quad C > 0, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Katenoide

Zaključek je, da so *katenoide edine rotacijske minimalne ploskve* v $\mathbb{R}^3$ (Leonhard Euler, 1744).



Totalna Gaussova ukrivljenost katenoide $S \subset \mathbb{R}^3$ je

$$\int_S K dA = \int_S \kappa_1 \kappa_2 dA = -4\pi.$$

To je najmanjša možna absolutna totalna ukrivljenost pravilno imerzirane minimalne ploskve v $\mathbb{R}^3$, razen za ravnino, kjer je enaka nič.

Galerija minimalnih ploskev: Riemannova ploskev (1867)

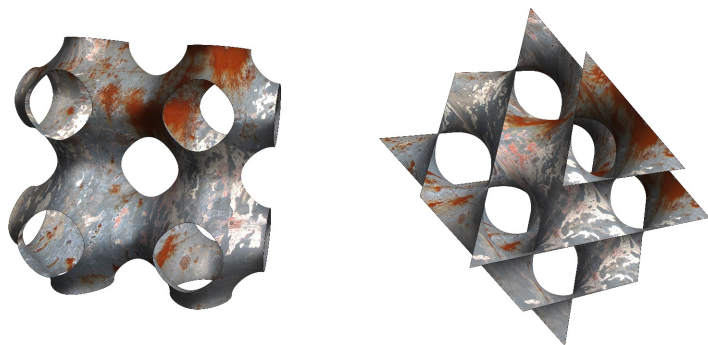
B. Riemann je v posthumnem članku (1867) opisal enoparametrično družino periodičnih minimalnih ploskev, parametriziranih z ravninskimi območji. Njegove ploskve imajo totalno Gaussovo ukrivljenost $-\infty$.

Enneperjeva ploskev (1868)



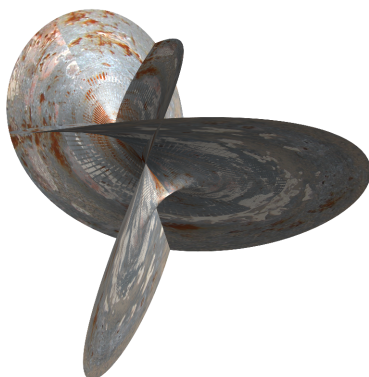
Poleg katenoide je Enneperjeva ploskev ena najpreprostejših minimalnih ploskev v $\mathbb{R}^3$. Parametrizirana je z ravnino $\mathbb{R}^2$ in njena totalna Gaussova ukrivljenost je -4π (kot pri katenoidi).

Schwarzovi ploskvi (1883)



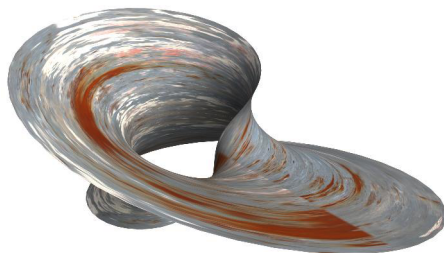
Schwarzova *primitivna* (levo) in *diamantna* (desno) minimalna ploskev sta peridočni vloženi minimalni ploskvi.

Hennebergova ploskev



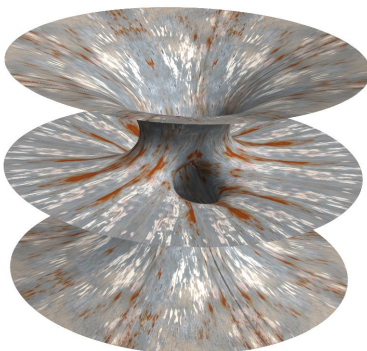
Hennebergova ploskev (1875) je bila prva znana neorientabilna minimalna ploskev v $\mathbb{R}^3$. Ima kritično točko, torej ni imerzirana.

Meeksov minimalni Möbiusov trak (1981)



W. H. Meeks je leta 1981 opisal prvi znan primer pravilno imerzirane neorientabilne minimalne ploskve v $\mathbb{R}^3$ — minimalni Möbiusov trak s totalno Gaussovo ukrivljenostjo -6π .

Costina ploskev



Costa's surface (1984) je kompletna vložena minimalna ploskev roda 1 v $\mathbb{R}^3$ s tremi konci in totalno Gaussovo ukrivljenostjo -12π .

Lopezova ploskev (1993)



Lopezova ploskev je neorientabilna imerzirana minimalna ploskev v $\mathbb{R}^3$, ki je parametrizirana s punktirano Kleinovo stlenico (odstranimo eno točko). Njena totalna Gaussova ukrivljenost je -8π .



Prvi znani pravilno vložen minimalni Möbiusov trak v $\mathbb{R}^4$. Prikazana je projekcija v $\mathbb{R}^3$. Njegova totalna Gaussova ukrivljenost je -4π .

19. predavanje: Izoperimetrični problemi

Problem je naslednji. Na prostoru funkcij $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$ (ali splošneje $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^n)$) imamo končno mnogo (v splošnem nelinearnih) funkcionalov Lagrangejevega tipa:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt \\ \mathcal{U}_j(x) &= \int_a^b U^j(t, x, \dot{x}) dt, \quad j = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Poiskati želimo funkcije $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$, ki zadoščajo pogojem

$$\mathcal{U}_j(x) = c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m$$

ter robnim pogojem na krajiščih a, b intervala, pri katerih $\mathcal{L}(x)$ doseže ekstremno vrednost.

Gre torej za iskanje *vezanega ekstrema* funkcionala $\mathcal{L}$ pri vezeh $\mathcal{U}_j(x) = c_j$ za $j = 1, \dots, m$.

Motivacija: vezani ekstremi v končni dimenziji

Če spremenljivka x ni funkcija, ampak vektor v $\mathbb{R}^n$ (kar je isto kot funkcija na n točkah), smo način reševanja spoznali pri Analizi 2. Recimo, da so funkcije $\mathcal{U}_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$) zvezno diferenciable na neki domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in so v neki točki $x^0 \in D$ njihovi gradienti $\nabla \mathcal{U}_j(x^0) \in \mathbb{R}^n$ ($j = 1, \dots, m$) linearno neodvisni (torej je $m \leq n$). Tedaj je po izreku o implicitni funkciji v neki okolici $U \subset \mathbb{R}^n$ točke x^0 množica

$$M = \{x \in U : \mathcal{U}_j(x) = \mathcal{U}_j(x^0), \quad j = 1, \dots, m\}$$

ploskev (podmnogoterost) dimenzije $n - m$ in kodimenzije m .

Funkcija $\mathcal{L}|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ ima v x^0 stacionarno točko natanko tedaj, ko je ortogonalna projekcija gradienta $\nabla \mathcal{L}(x^0)$ na podprostor

$$\Sigma = \{v \in \mathbb{R}^n : \nabla_v \mathcal{U}_j(x^0) = \nabla \mathcal{U}_j(x^0) \cdot v = 0, \quad j = 1, \dots, m\} = T_{x^0} M$$

enaka 0. To pa je res natanko tedaj, ko je

$$\nabla \mathcal{L}(x^0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla \mathcal{U}_j(x^0)$$

za neka števila $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (Lagrangejevi multiplikatorji).

Primer 1: izoperimetrični problem

Podobna logika velja v neskončno razsežnih vektorskih prostorih. Najprej si oglejmo nekaj primerov.

Primer 1. V zgornji polravnini si izberemo točki

$$T_0(a, A), \quad T_1(b, B), \quad a < b, \quad A > 0, \quad B > 0.$$

Iščemo funkcijo $y = y(x)$ na $[a, b]$, ki zadošča robnima pogoju $y(a) = A$, $y(b) = B$, tako da je dolžina grafa predpisana:

$$\ell(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = c > 0$$

in je ploščina pod grafom maksimalna ali minimalna:

$$\mathcal{A}(y) = \int_a^b y(x) dx \quad \text{maksimalna/minimalna.}$$

Seveda moramo privzeti, da je $\ell(y) \geq \text{dist}(T_0, T_1)$.

Pristop k reševanju

Denimo, da je

$$y_s(x) = y(x, s) = y(x) + sv(x) + o(s) \quad (s \in \mathbb{R}), \quad y_s(a) = A, \quad y_s(b) = B$$

neka deformacija začetne funkcije $y = y_0$, ki zadošča pogoju

$$\ell(y_s) = \int_a^b \sqrt{1 + y'_s(x)^2} dx = c > 0 \quad \text{za vsak } s.$$

Variacija $v(x) = \frac{\partial}{\partial s} \big|_{s=0} y_s(x) \in \mathcal{C}^1([a, b])$ zadošča $v(a) = v(b) = 0$. Velja:

$$0 = \nabla_v \ell(y) = \int_a^b \frac{y'(x)v'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) v(x) dx$$

Sklep: če ima pri funkciji $y = y(x)$ ploščina $\mathcal{A}(y)$ lokalni ekstrem (pri veznem pogoju $\ell(y) = c$), potem za vse dopustne variacije v , ki zadoščajo $\nabla_v \ell(y) = 0$, velja

$$\nabla_v \mathcal{A}(y) = \int_a^b v(x) dx = 0.$$

Ključni sklep

Pri fiksnem $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$ sta preslikavi

$$v \mapsto \nabla_v \ell(y), \quad v \mapsto \nabla_v \mathcal{A}(y)$$

linearna funkcionala na vektorskem prostoru

$$V = \{v \in \mathcal{C}([a, b]) : v(a) = v(b) = 0\}.$$

Oba funkcionala sta podana z integracijo glede na neko zvezno funkcijo na $[a, b]$. Dobljeni pogoj pove, da je jedro prvega funkcionala vsebovano v jedru drugega funkcionala. Odtod sledi, da je drugi funkcional konstantni večkratnik prvega. Zato obstaja konstanta $\lambda \in \mathbb{R}$ (*Lagrangejev multiplikator*), tako da je

$$\int_a^b \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) \right) v(x) dx = 0 \text{ za vsak } v \in V.$$

Odtod sledi

$$1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) = 0$$

$$x + \lambda \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = C_1 \in \mathbb{R}$$

Rešitev

Enačbo

$$x + \lambda \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = C_1$$

rešimo parametrično:

$$\begin{aligned} y' &= \tan u \\ 1/\sqrt{1 + y'^2} &= 1/\sqrt{1 + \tan^2 u} = \cos u \\ x &= C_1 - \lambda \tan u \cos u = C_1 - \lambda \sin u \\ dx &= -\lambda \cos u du \\ dy &= y' dx = \tan u (-\lambda \cos u du) = -\lambda \sin u du \\ y &= C_2 + \lambda \cos u \end{aligned}$$

Odtod sledi

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2 (\sin^2 u + \cos^2 u) = \lambda^2.$$

Rešitve, ki podajajo ekstremne vrednosti, so torej krožnice.

Na voljo imamo tri proste konstante λ, C_1, C_2 , s katerimi lahko načeloma zadostimo rob-nima pogojema ter pogoju o dolžini krivulje.

Primer 2

Iščemo krivuljo predpisane dolžine $l > 0$ v zgornji polravnini $y \geq 0$ s krajiščema na x -osi, ki z osjo x oklepa največjo ploščino. Krajišči pri tem nista predpisani. Rešitve moramo seveda izbirati iz zgornje družine krožnic. Problem je, da ni vnaprej jasno, katera izmed njih bo prava, ker nismo predpisali robnih točk in niti ne vemo, na katerem x -intervalu naj bi problem študirali.

Tovrsten problem lažje in naravneje formuliramo s pomočjo parametričnega zapisa $(x(t), y(t))$ iskane krivulje na intervalu $t \in [0, 1]$, kjer je $y(t) \geq 0$. Ker je problem očitno invarianten za translacije v smeri osi x , lahko vzamemo, da je

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

medtem ko vrednosti $x(1)$ ne predpišemo. Ploščina med krivuljo in osjo x je enaka

$$\mathcal{A}(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt,$$

dolžina krivulje pa je

$$\ell(x, y) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = l.$$

Iščemo torej maximum funkcionala $\mathcal{A}(x, y)$ pri pogoju $\ell(x, y) = l$.

Euler-Lagrangejev sistem

Dopustne variacije so $\mathcal{C}^1$ funkcije $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ na $[0, 1]$, ki zadoščajo robnim pogojem

$$v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad v_2(1) = 0.$$

Isti sklep kot prej pokaže, da sta pri iskani funkciji $(x(t), y(t))$ linearna funkcionala

$$v \mapsto \nabla_v \ell(x, y), \quad v \mapsto \nabla_v \mathcal{A}(x, y)$$

linearno odvisna, torej obstaja število $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da je

$$\nabla_v (\mathcal{A}(x, y) - \lambda \ell(x, y)) = 0 \quad \text{za vsako dopustno variacijo } v.$$

Ta izraz je enak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 (\dot{y}(t)v_1(t) + x(t)\dot{v}_2(t) - \dot{x}(t)v_2(t) - y(t)\dot{v}_1(t)) dt \\ & \quad - \lambda \int_0^1 \frac{\dot{x}(t)\dot{v}_1(t) + \dot{y}(t)\dot{v}_2(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} dt \\ & = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{y}(t)v_1(t) - \left(\frac{y(t)}{2} + \lambda \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right) \dot{v}_1(t) \right) dt \\ & \quad - \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{x}(t)v_2(t) - \left(\frac{x(t)}{2} - \lambda \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right) \dot{v}_2(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Primer 2: Euler-Lagrangejev sistem

Upoštevaje Razmadzejevo lemo (oziroma z integracijo per partes obeh členov, ki vsebujeta $\dot{v}_1(t)$ in $\dot{v}_2(t)$) dobimo prirejen Euler-Lagrangejev sistem enačb:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}(t)}{2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{y(t)}{2} + \lambda \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right) &= 0, \\ \frac{\dot{x}(t)}{2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{x(t)}{2} - \lambda \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Skupaj z robnim pogojem za prvo enačbo pri $t = 1$ (ker je vrednost $v_1(1)$ poljubna):

$$\frac{y(1)}{2} + \lambda \frac{\dot{x}(1)}{\sqrt{\dot{x}^2(1) + \dot{y}^2(1)}} = 0 \iff \dot{x}(1) = 0.$$

Pogoj $\dot{x}(1) = 0$ pomeni, da bo rešitev sekala os x pravokotno v toči $(x(1), 0)$.

Primer 2, rešitev

Obe Euler-Lagrangejevi enačbi lahko enkrat integriramo:

$$\begin{aligned} y(t) + \frac{\lambda \dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} &= 0, \\ x(t) - \frac{\lambda \dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} &= a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Integracijska konstanta v prvi enačbi je enaka 0, ker je pri $t = 1$ funkcija na levi strani enačbe enaka 0. Konstanta a je poljubna.

Če pomnožimo prvo enačbo z $\dot{y}(t)$, drugo z $\dot{x}(t)$ in seštejemo, dobimo z upoštevanjem $x(0) = y(0) = 0$:

$$\begin{aligned} x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) &= a\dot{x}(t), \quad a \in \mathbb{R} \\ x(t)^2 + y(t)^2 &= 2ax(t) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ (x(t) - a)^2 + y(t)^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Rešitev je polkrožnica s polmerom $a = l/\pi$ nad osjo x .

Primer 3: varianta na temo

Obravnavajmo analogen problem, le da iščemo *sklenjeno krivuljo fiksne dolžine* $l > 0$, ki *ograjuje lik z največjo ploščino*.

Rešitev iščemo v parametrični obliki $(x(t), y(t))$ ($t \in [0, 1]$) z robnimi pogoji

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Dopustne variacije so $\mathcal{C}^1$ funkcije $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ na $[0, 1]$ z $v(0) = v(1) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Euler-Lagrangejev sistem je enak kot v primeru 2, robni pogoji pa so sedaj trivialno izpolnjeni. Z enkratno integracijo Euler-Lagrangejevih enačb dobimo

$$\begin{aligned} x(t) - \frac{\lambda \dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} &= a \in \mathbb{R} \\ y(t) + \frac{\lambda \dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}} &= b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tako kot v primeru 2 zaključimo, da so rešitve krožnice

$$(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 = a^2 + b^2 = (l/2\pi)^2.$$

Splošni problem vezanega ekstrema

Vrnimo se k splošni nalogi z m vezmi in podrobneje utemeljimo korake. Na prostoru $\mathcal{C}^2([a, b])$ imamo funkcionalne Lagrangejevega tipa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt \\ \mathcal{U}_j(x) &= \int_a^b U^j(t, x, \dot{x}) dt, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Poiskati želimo funkcije $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$ z danimi vrednostmi $x(a)$ in $x(b)$ v krajiščih, ki zadoščajo pogojem

$$\mathcal{U}_j(x) = c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m,$$

pri katerih $\mathcal{L}(x)$ doseže ekstremno vrednost.

Na vektorskem prostoru dopustnih variacij

$$V = \{v \in \mathcal{C}^1([a, b]) : v(a) = v(b) = 0\}.$$

imamo (pri fiksnem $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$) linearne funkcionalne

$$\begin{aligned} \ell(v) &= \nabla_v \mathcal{L}(x) = \int_a^b \left(L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \right) v(t) dt \\ u_j(v) &= \nabla_v \mathcal{U}_j(x) = \int_a^b \left(U_x^j - \frac{d}{dt} U_{\dot{x}}^j(t, x, \dot{x}) \right) v(t) dt, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Pogoj za nastop ekstrema

Ker opazujemo le tiste deformacije funkcije $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$, pri katerih imajo funkcionali $\mathcal{U}_j$ konstantno vrednost, so dopustne le deformacije funkcije x v smeri tistih funkcij $v \in V$, ki zadoščajo pogojem

$$u_j(v) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Funktional $\mathcal{L}$ pri pogojih $\mathcal{U}_j = c_j$ ($j = 1, \dots, m$) ima torej stacionarno točko v x , če za vse $v \in V$, ki zadoščajo zgornjim pogojem, velja $\ell(v) = 0$. Na krako:

$$\bigcap_{j=1}^m \ker u_j \subset \ker \ell.$$

Trditev. Zgornja lastnost velja natanko tedaj, ko obstajajo števila $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (Lagrangejevi multiplikatorji), tako da je

$$\ell = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j \quad \text{na prostoru } V.$$

V našem primeru je enakost v zgornji trditvi ekvivalentna diferencialni enačbi

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(U_x^j - \frac{d}{dt} U_{\dot{x}}^j(t, x, \dot{x}) \right)$$

s prostimi parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, ob tem pa morajo biti izpolnjene tudi enačbe

$$\mathcal{U}_j(x) = c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Dokaz trditve. Dokazujemo

$$\bigcap_{j=1}^m \ker u_j \subset \ker \ell \implies \ell = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j.$$

Lahko privzamemo, da so funkcionali $u_1, \dots, u_m : V \rightarrow \mathbb{R}$ linearno neodvisni.

(Če niso, izberemo največjo podmnožico linearno neodvisnih vektorjev. Ostali ne vplivajo na predpostavko, saj se presek jeder ne spremeni, če jih odvržemo; prav tako ne vplivajo na zaključek.)

Lemma 0.4. Če so linearni funkcionali $u_1, \dots, u_m : V \rightarrow \mathbb{R}$ na vektorskem prostoru V linearno neodvisni, obstajajo vektorji $v_1, \dots, v_m \in V$, tako da velja

$$u_i(v_j) = \delta_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Dokaz Indukcija na m . Za $m = 1$ izberemo vektor $\tilde{v}_1 \in V$, tako da je $u_1(\tilde{v}_1) \neq 0$. Vektor

$$v_1 = \frac{1}{u_1(\tilde{v}_1)} \tilde{v}_1$$

tedaj zadošča $u_1(v_1) = 1$ in trditev velja za $m = 1$. Recimo, da velja za $m - 1$. Izberemo vektorje $v'_1, \dots, v'_{m-1}$, tako da je

$$u_i(v'_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m - 1.$$

Za poljuben $v \in V$ velja

$$w := v - \sum_{i=1}^{m-1} u_i(v) v'_i \in \bigcap_{j=1}^{m-1} \ker u_j,$$

kar vidimo iz

$$u_j(w) = u_j(v) - \sum_{i=1}^{m-1} u_i(v) u_j(v'_i) = u_j(v) - u_j(v) = 0, \quad j = 1, \dots, m - 1.$$

Dokaz leme

Trdimo, da obstaja vektor $v \in V$, tako da za prirejeni vektor w velja $u_m(w) \neq 0$. V nasprotnem primeru bi za vsak $v \in V$ veljalo

$$0 = u_m(w) = u_m(v) - \sum_{i=1}^{m-1} u_m(v'_i) u_i(v) = \left(u_m - \sum_{i=1}^{m-1} u_m(v'_i) u_i \right) (v),$$

torej bi bil u_m linearna kombinacija funkcionalov $u_1, \dots, u_{m-1}$ v protislovju s predpostavko. Za tako izbran vektor v vzamemo

$$v_m = \frac{1}{u_m(w)} w.$$

Tedaj je

$$u_m(v_m) = 1, \quad u_j(v_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m - 1.$$

Definiramo nove vektorje

$$v_i := v'_i - u_m(v'_i) v_m, \quad i = 1, \dots, m - 1.$$

Tedaj za $i, j = 1, \dots, m - 1$ velja

$$u_m(v_i) = u_m(v'_i) - u_m(v'_i) u_m(v_m) = 0, \quad u_j(v_i) = u_j(v'_i) = \delta_{ij}.$$

Zaključek dokaza trditve

Naj bo

$$\bigcap_{j=1}^m \ker u_j \subset \ker \ell$$

in funkcionali u_j linearno neodvisni. Po lemi obstajajo vektorji $v_1, \dots, v_m \in V$, tako da velja

$$u_i(v_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Poljuben vektor $v \in V$ zapišimo v obliki

$$v = \left(v - \sum_{i=1}^m u_i(v)v_i \right) + \sum_{i=1}^m u_i(v)v_i.$$

Prvi člen na desni je očitno v preseku jeder $\bigcap_{j=1}^m \ker u_j$ in zato po predpostavki tudi v $\ker \ell$. Torej je

$$\ell(v) = \sum_{i=1}^m u_i(v)\ell(v_i), \quad v \in V.$$

Če definiramo števila $\lambda_i := \ell(v_i) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, sledi

$$\ell = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i.$$

20. predavanje: Hamiltonova mehanika

Euler–Lagrangejeve enačbe, ki podajajo ekstremale danega variacijskega problema, so pri problemih iz (Newtonove) fizike in mehanike v tesni zvezi s *Hamiltonovo mehaniko* in s Hamiltonovim principom najmanjše akcije.

Sir William Rowan Hamilton, 1808–1865

Povezavo omogoča *Legendrova transformacija*, ki ponuja posebno zanimivo in fizikalno pomensko redukcijo Euler–Lagrangejeve diferencialne enačbe drugega reda na sistem diferencialnih enačb prvega reda.

Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783

Dober vir za to povezavo, ki vsebuje globok vpogled v naravo stvari, ponuja klasična monografija

Vladimir Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Nauka, Moskva, 1974

Primer: Newtonove enačbe gibanja

Opazujemo gibanje sistema n delcev v prostoru $\mathbb{R}^3$ pod vplivom potencialnega polja sil. Pot i -tega delca opisuje vektorska funkcija $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^3$; gibanje vseh delcev torej opisuje vektorska funkcija $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) \in \mathbb{R}^N$, $N = 3n$. Če je m_i masa i -tega delca, so Newtonove enačbe gibanja

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i + U_{\mathbf{x}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tu je $U_{\mathbf{x}_i} = \partial U / \partial \mathbf{x}_i = \nabla_{\mathbf{x}_i} U$. Funkcija $U(\mathbf{x})$ je *potencialna energija* sistema, *kinetična energija* pa je

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2.$$

Naj bo $L = T - U$ razlika med kinetično in potencialno energijo. Tedaj je

$$L_{\dot{\mathbf{x}}_i} = T_{\dot{\mathbf{x}}_i} = m_i \dot{\mathbf{x}}_i, \quad L_{\mathbf{x}_i} = -U_{\mathbf{x}_i}.$$

Euler-Lagrangejev sistem enačb za Lagrangian L je

$$0 = L_{\mathbf{x}_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{\mathbf{x}}_i} = -U_{\mathbf{x}_i} - m_i \ddot{\mathbf{x}}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

D'Alembert–Hamiltonov princip minimalne akcije

Zaključek – princip najmanjše akcije: Ekstremale Euler-Lagrangejevega sistema za Lagrangian $L = T - U$ so rešitve Newtonovih enačb gibanja za sistem delcev s kinetično energijo T in potencialno energijo U .

Uvedimo novo spremenljivko, ki se imenuje *impulz* ali *gibalna količina*:

$$\mathbf{p} = L_{\dot{\mathbf{x}}} = T_{\dot{\mathbf{x}}} = (m_i \dot{\mathbf{x}}_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^N.$$

Očitno lahko hitrostni vektor $\dot{\mathbf{x}}$ izrazimo z impulzom $\mathbf{p}$. Če to naredimo in vstavimo v (skalarno) funkcijo

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 2T - (T - U) = T + U,$$

je H funkcija spremenljivk $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Opazimo, da je $H_{\mathbf{x}} = -L_{\mathbf{x}} = U_{\mathbf{x}}$ in $H_{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{x}}$. Enačbe gibanja lahko s pomočjo funkcije H zapišemo kot sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}}.$$

To je ravno *Hamiltonov sistem* za $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ s *Hamiltonovo funkcijo* $H = T + U$, ki je *vsota kinetične in potencialne energije sistema*.

Energija H se ohranja vzdolž rešitev sistema (trajektorij).

Korespondenca Lagrange $\Longleftrightarrow$ Hamilton

Kar smo naredili v posebnem primeru, skušajmo narediti za poljuben Lagrangian $L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Spomnimo se Euler-Lagrangejevega sistema:

$$L_{\mathbf{x}} - \frac{d}{dt} L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0.$$

Osnovna ideja je, da uvedemo novo spremenljivko

$$\mathbf{p} = L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

in iz zgornje enačbe skušamo izraziti $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$. Če nam to uspe, definiramo Hamiltonovo funkcijo H , prirejeno Lagrangianu L :

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) - L(t, \mathbf{x}, \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})).$$

Sledi $H_t + L_t = 0$, $H_{\mathbf{x}} + L_{\mathbf{x}} = 0$ in Hamiltonov sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}}.$$

Prva enačba sledi iz definicije funkcije H , druga pa iz $-H_x = L_x$, Euler–Lagrangejeve enačbe in definicije spremenljivke $\mathbf{p}$. Seveda lahko prehodimo tudi obratno pot in Hamiltonianu H priredimo Lagrangian L .

Primer: konzervativni sistem

Opazujemo sistem s kinetično in potencialno energijo

$$T = T(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad U = U(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

D’Alembert–Hamiltonov princip trdi, da se sistem giblje tako, da je prva variacija funkcionala z Lagrangianom $L = T - U$ vzdolž trajektorije enaka nič:

$$\delta \int_a^b L(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt = 0.$$

To je ekvivalentno Euler–Lagrangejevi enačbi

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0,$$

ki jo z uvedbo impulza

$$\mathbf{p} = L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

in Hamiltonove funkcije

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

prevedemo v Hamiltonov sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}}.$$

Če je kinetična energija T homogena kvadratična v $\dot{\mathbf{x}}$:

$$T(\dot{\mathbf{x}}) = A\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}},$$

kjer je A simetrična neizrojena matrika in je potencialna energija U neodvisna od $\dot{\mathbf{x}}$, dobimo kot v posebnem primeru

$$\mathbf{p} = L_{\dot{\mathbf{x}}} = T_{\dot{\mathbf{x}}} = 2A\dot{\mathbf{x}},$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}A^{-1}\mathbf{p},$$

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = 2A\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} - (A\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} - U) = A\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} + U = T + U.$$

Legendrejeva transformacija

Pri pretvorbi Euler–Lagrangejeve enačbe v Hamiltonovo enačbo smo s srečali z naslednjim problemom. Uvedli smo novo spremenljivko

$$\mathbf{p} = L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$$

in skušali izraziti

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

Spremenljivki t in $\mathbf{x}$ pri tem igrata vlogo parametra.

Oglejmo si ta problem natančneje, pri čemer bomo spremenljivko $\dot{\mathbf{x}}$ označili z $\mathbf{u}$, ostali dve spremenljivki t , $\mathbf{x}$ pa bomo zaenkrat ignorirali.

Dana je $\mathcal{C}^2$ funkcija $F(\mathbf{u})$ spremenljivke $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na neki domeni v $\mathbb{R}^n$. Zanima nas, kdaj lahko iz enačbe

$$\mathbf{p} = F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = (F_{u_1}(\mathbf{u}), \dots, F_{u_n}(\mathbf{u})) = \nabla F(\mathbf{u})$$

izrazimo $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{p})$. Po izreku o inverzni preslikavi rešitev v okolici dane točke $\mathbf{u}^0$ obstaja, če je Jacobijeva matrika preslikave $\mathbf{u} \mapsto F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$ v točki $\mathbf{u}^0$ neizrojena. Ta Jacobijeva matrika pa je Hessejeva matrika funkcije F :

$$A = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Legendrejeva transformacija

Denimo, da je $\det A(\mathbf{u}^0) \neq 0$ in zato lokalni inverz $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{p})$ obstaja v okolici točke $\mathbf{p}^0 = \nabla F(\mathbf{u}^0)$. Razlogi simetrije nakazujejo idejo, da bi poiskali drugo funkcijo $G(\mathbf{p})$ v okolici $\mathbf{p}^0$, tako da je tudi

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{p}) = G_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \nabla G(\mathbf{p}).$$

Če to velja, je totalni diferencial vsote $F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{p})$ enak

$$d(F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{p})) = F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} + G_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) \cdot d\mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot d\mathbf{p} = d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}),$$

zato je rešitev problema (z adicijsko konstanto 0)

$$F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}.$$

Obratno, iz zgornje identitete sledi

$$F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}, \quad G_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \mathbf{u}.$$

Funkcija G , dobljena iz te enačbe, se imenuje *Legendrejeva transformiranka* $G = \mathcal{L}(F)$ funkcije F in obratno, F je Legendrejeva transformiranka G .

Adrien Marie Legendre, 1752–1833

Geometrijski pomen Legendrove transformacije

Oglejmo si Legendrovo transformacijo v dimenziji $n = 1$, torej za funkcije ene spremenljivke. Dana je $\mathcal{C}^2$ funkcija $f(x)$. Pogoji za neizrojenost Hessejeve matrike je $f''(x) \neq 0$. Recimo, da je $f'' > 0$, torej je f strogo konveksna.

Za dano število $p \in \mathbb{R}$ skušamo najti x v domeni funkcije f , da je

$$f'(x) = p.$$

Ker je f strogo konveksna in je zato njen odvod f' strogo naraščajoča funkcija, je rešitev enolična, kjer obstaja. Naj bo $x = x(p)$ rešitev. Definiramo funkcijo

$$g(p) = px - f(x) = px(p) - f(x(p)).$$

Pri fiksnem p funkcija $x \mapsto px - f(x)$ doseže največjo vrednost pri $x = x(p)$, saj je v tej točki njen odvod po x enak 0, njen drugi odvod pa je $-f''(x) < 0$.

Zaključek:

- Pri fiksnem p je $g(p)$ maksimalna vrednost funkcije $x \mapsto px - f(x)$.
- Pri fiksnem x je $f(x)$ maksimalna vrednost funkcije $p \mapsto px - g(p)$.

Primeri

Primer 1:

$$f(x) = x^2, \quad p = f'(x) = 2x, \quad x = p/2, \\ g(p) = p x - x^2 = \frac{p^2}{2} - (p/2)^2 = \frac{p^2}{4}.$$

Primer 2:

$$f(x) = \frac{x^a}{a}, \quad a > 1. \\ p = f'(x) = x^{a-1}, \quad x = p^{1/(a-1)}, \\ g(p) = p x - \frac{x^a}{a} = p^{a/(a-1)} - p^{a/(a-1)}/a = \frac{p^b}{b},$$

kjer je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad (\text{konjugirana eksponenta}).$$

FRANC FORSTNERIČ, FACULTY OF MATHEMATICS AND PHYSICS, UNIVERSITY OF LJUBLJANA, AND
INSTITUTE OF MATHEMATICS, PHYSICS, AND MECHANICS, JADRANSKA 19, 1000 LJUBLJANA, SLOVENIA

Email address: franc.forstneric@fmf.uni-lj.si