

Numerične metode 2021/22: 1.domača naloga

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-dn1.zip` in jih oddajte preko učilnice najkasneje dan pred kvizom.

1. Iteracijske metode.

Implementirajte navadno iteracijo, tangentno metodo in Halleyevo metodo. Pomagajte si lahko s priloženimi Matlab predlogami. Implementirane metode preizkusite na funkciji

$$f(x) = x^2 + \log(x)$$

pri začetnem približku $x_0 = 2$, toleranci 10^{-10} in številu korakov $N = 200$. Navadno iteracijo preizkusite na iteracijskih funkcijah

$$g_1(x) = e^{-x^2}, \quad g_2(x) = \frac{x + e^{-x^2}}{2} \quad \text{in} \quad g_3(x) = \frac{2x^3 + e^{-x^2}}{1 + 2x^2}.$$

Primerjajte število korakov posameznih metod in napake dobljenih približkov (odstop od dovolj točne vrednosti ničle, ki jo dobite z ukazom `fzero`). Kolikšna je povprečna vrednost vseh izračunanih približkov pri vsaki izmed metod?

Poskrbite tudi, da imate implementirani metodi bisekcija in regula-falsi. Izvedite 15 korakov obeh metod s funkcijo f na intervalu $[0.1, 2]$. Katera metoda dobiva točnejše približke?

2. Sistemi linearnih enačb.

(a) LU razcep.

Implementirajte LU razcep brez pivotiranja. Preizkusite ga na matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & 18 & 19 \\ 6 & -2 & 7 & 14 \end{bmatrix}.$$

Koliko je $\|U\|_F$? Koliko je $\|A\|_1$?

LU razcep matrike A z delnim pivotiranjem lahko v Matlabu dobite z ukazom `[L,U,P] = lu(A)`, kjer je P ustrezna permutacijska matrika, tako da velja $PA = LU$. Izračunajte še LU razcep matrike A z delnim pivotiranjem. Koliko je $\|L\|_\infty$, kjer je L matrika, dobljena z LU razcepom matrike A z delnim pivotiranjem?

(b) **LU razcep za tridiagonalno matriko.**

Implementirajte Thomasov algoritem za LU razcep tridiagonalne matrike. Izračunajte razcep za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & x_i & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

za vse vrednosti parametra $x_i, i = 1, 2, \dots, 21$ z intervala $[1, 5]$, ki ga enakomerno razdelimo na 20 delov (za delitev intervala lahko uporabite ukaz `linspace`). Dobljene rezultate smiselno shranite, da boste lahko dostopali do vektorjev l in u za vsak $x_i, i = 1, 2, \dots, 21$. Na primer, sestavite matriki $L \in \mathbb{R}^{3 \times 21}$ in $U \in \mathbb{R}^{4 \times 21}$, v katerih i -ti stolpec predstavlja vektor l oz. u dobljen s Thomasovim algoritmom za matriko A s parametrom x_i .

(c) **Razcep Choleskega z diagonalnim pivotiranjem.**

Implementirajte razcep Choleskega z diagonalnim pivotiranjem. Naj bo V spodnje trikotna matrika, ki jo dobimo z implementiranim algoritmom za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}.$$

Koliko je $\det(V - A)$?

Razcep Choleskega brez pivotiranja lahko v Matlabu izračunate z ukazom `chol(A)`. Ukaz $V_1 = \text{chol}(A)$ bo vrnil zgornje trikotno matriko V_1 . Koliko je $\det(V_1^T - V)$?