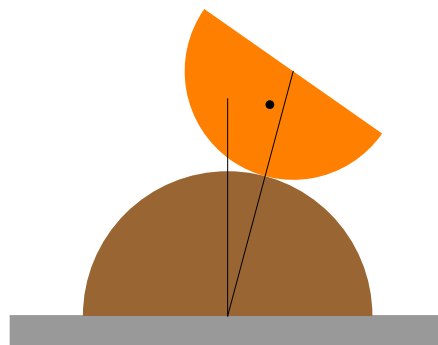


1. kolokvij iz Mehanike

24. novembra 2021

1. Točka se giblje v ravnini tako, da je obodni pospešek enak izrazu $\alpha\dot{r}/\sqrt{r}$, radialni pospešek pa je enak nič.
 - (a) Določi tir, če je $\alpha = 0$.
 - (b) Za $\alpha \neq 0$ in začetne pogoje $r(t = 0) = \dot{r}(t = 0) = \dot{\varphi}(t = 0) = 0$ določi trajektorijo $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.
 - (c) Določi tudi tir.
2. Dan je potencial $U = U_0(x^2 - a^2)e^{-x/a}$, $U_0 > 0$, $a > 0$.
 - (a) Skiciraj potencial in kvalitativno obravnavaj možne tire.
 - (b) Izračunaj harmonično aproksimacijo periode gibanja v okolici ravnovesne lege.
3. Na fiksirano homogeno polkroglo s polmerom R_1 je postavljena homogena polkrogla s polmerom R_2 , glej skico. Določi največji dopustni polmer R_2 tako, da bo ravnovesna lega stabilna. Pri tem upoštevaj, da se zgornja polkrogla kotili po spodnji. Razdalja masnega središča polkrogle s polmerom R do osnovne ploskve je $\frac{3}{8}R$.



4. Točka se giblje po gladki vijačnici s polmerom a in naklonskim kotom α . Na točko deluje sila teže, ki je pravokotna na os vijačnice.
 - (a) Izračunaj dolžino loka vijačnice.
 - (b) Zapiši potencial sile teže kot funkcijo ločne dolžine.
 - (c) Izračunaj harmonično aproksimacijo periode nihanja v okolici ravnovesne lege.

Rešitve

1. (a) Če je $\alpha = 0$ je tudi obodni pospešek enak nič. Tir je premica.
- (b) Pišimo $p = -\frac{1}{2}$. Enačbo $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \alpha\dot{r}r^p$ pomnožimo z r . Potem je

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p+2}r^{p+2}\right)$$

in potem

$$r^2\dot{\theta} = \alpha \frac{1}{p+2}r^{p+2} + C.$$

Iz začetnih pogojev sledi, da je $C = 0$. tako dobimo enačbo

$$\dot{\theta} = \frac{\alpha}{p+2}r^p. \quad (1)$$

Upoštevajmo sedaj (1) in, da je radialni pospešek enak 0

$$0 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{\alpha^2}{(p+2)^2}r^{2p+1}.$$

Pomnožimo enačbo z $\dot{r}$. Potem sledi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha^2}{(p+2)^2(2p+2)}r^{2p+2}\right)$$

in

$$\dot{r} = \frac{\alpha}{(p+2)\sqrt{1+p}}r^{p+1},$$

saj iz začetnih pogojev sledi, da je integracijska konstanta enaka nič. Potem je

$$\int_0^r \frac{dr}{r^{-p-1}} = \frac{\alpha}{(p+2)\sqrt{1+p}} \int_0^t dt. \quad (2)$$

Integral na levi obstaja, če je $-p-1 > -1$, torej za $p < 0$. Ker mora veljati $1+p > 0$, sledi $-1 < p < 0$. Naš $p = -\frac{1}{2}$ ustreza temu pogoju. Iz (2) sledi

$$r = \left(\frac{-\alpha p}{(p+2)\sqrt{1+p}}t\right)^{-1/p}.$$

Tako smo določili $r = r(t)$. Določimo še $\theta = \theta(t)$. Iz (1) sledi

$$\dot{\theta} = -\frac{\sqrt{1+p}}{p} \frac{1}{t}.$$

Potem je

$$\theta = -\frac{\sqrt{1+p}}{p} \log t. \quad (3)$$

Trajektorija je s tem določena.

- (c) Iz (3) sledi

$$t = e^{-p\theta/\sqrt{1+p}}.$$

Vstavimo dobljeno v $r = r(t)$. Tako je

$$r = \left(\frac{-\alpha p}{(p+2)\sqrt{1+p}}\right)^{-1/p} e^{\theta/\sqrt{1+p}}.$$

Tir je logaritemska spirala.

2. (a) Skica potenciala je na sliki 2a. Očitno ima potencial dva lokalna ekstrema. Izračunajmo jih.

$$U' = \frac{U_0}{a} e^{-x/a} (-x^2 + 2ax + a^2).$$

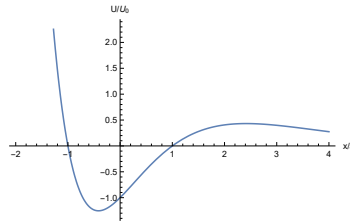
Stacionarni točki sta $x_{1,2} = a(1 \pm \sqrt{2})$. Izračunajmo še drugi odvod v stacionarnih točkah.

$$U''(x_{1,2}) = \frac{U_0}{a} e^{-x_{1,2}/a} (-2x_{1,2} + 2a) = \mp 2\sqrt{2}U_0 e^{1 \pm \sqrt{2}}.$$

Minimum je tako pri $x_2 = a(1 - \sqrt{2})$, lokalni maksimum pa pri $x_1 = a(1 + \sqrt{2})$. Vrednosti ekstremov so

$$U_2 = 2U_0 (1 - \sqrt{2}) a^2 e^{\sqrt{2}-1}, \quad U_1 = 2U_0 (1 + \sqrt{2}) a^2 e^{-1-\sqrt{2}}.$$

Za $E_0 \in (U_2, U_1)$ je gibanje omejeno in periodično, za $E_0 > U_1$ pa točka ubeži v neskončnost.

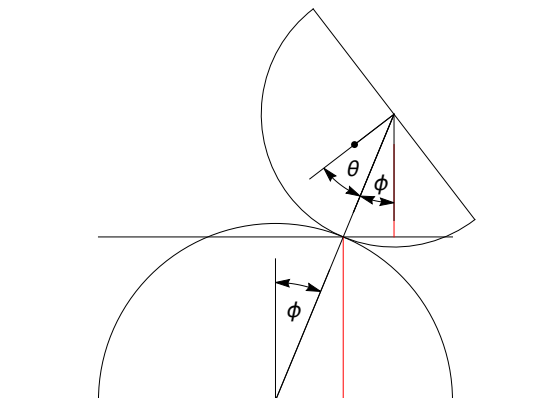


- (b) Harmonična aproksimacije periode je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''(x_2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{m e^{1-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}U_0}}.$$

3. Narišimo sliko s kotom odklona φ od zgornje lege, glej sliko 3. Ker se polkrogla kotali, je $R_2\theta = R_1\varphi$. Višina masnega središča zgornje polkrogle je za $\varphi > 0$ enaka

$$y = (R_1 + R_2) \cos \varphi - d \cos(\theta + \varphi).$$



Upoštevajmo, da je $d = \frac{3}{8}R_2$ in zaradi pogoja kotaljenja $\theta = \frac{R_1}{R_2}\varphi$. Potem je potencial sile teže enak

$$U = mgy = mg \left((R_1 + R_2) \cos \varphi - \frac{3}{8}R_2 \cos \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \varphi \right).$$

Ravnovesno lego poiščemo iz pogoja $U' = 0$. Izračunajmo

$$U' = -mg(R_1 + R_2) \left(\sin \varphi - \frac{3}{8} \sin \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \varphi \right).$$

Ravnovesna lega je očitno $\varphi = 0$.

Ravnovesna lega je stabilna, če pripada lokalnemu minimumu. Velja

$$U'' = -mg(R_1 + R_2) \left(\cos \varphi - \frac{3}{8} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \cos \varphi \right)$$

in

$$U''(\varphi = 0) = -mg(R_1 + R_2) \left(1 - \frac{3}{8} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \right).$$

Pogoj stabilnosti je izpolnjen, če je

$$\frac{3}{8} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) > 1$$

oziroma

$$\frac{R_1}{R_2} > \frac{5}{3}.$$

Natančnejši račun pokaže, da je za $\frac{R_1}{R_2} = \frac{5}{3}$ ravnovesna lega nestabilna.

4. (a) Vijačnico parameterizirajmo tako, da je

$$\vec{r} = a \cos \varphi \vec{i} + a \sin \varphi \vec{j} + a \tan \alpha \varphi \vec{k}.$$

Potem je

$$ds = \sqrt{\vec{r}' \cdot \vec{r}'} d\varphi = a \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} d\varphi = \frac{a}{\cos \alpha} d\varphi.$$

Dolžina krivulje je tako $s = \frac{a}{\cos \alpha} \varphi$.

- (b) Privzemimo, da sila teže deluje v smeri osi x . Potencial sile teže je

$$U = -m\vec{g} \cdot \vec{r} = -mga \cos \varphi = -mga \cos \frac{s \cos \alpha}{a}.$$

- (c) Izračunajmo

$$U' = \frac{dU}{ds} = mg \cos \alpha \sin \frac{s \cos \alpha}{a}.$$

Očitno so ravnovesne lege pri $\frac{s}{a} \cos \alpha = k\pi$ oziroma pri $\varphi = k\pi$. Nadalje je

$$U'' = \frac{mg}{a} \cos^2 \alpha \cos \frac{s \cos \alpha}{a}.$$

V ravnovesnih legah je

$$U'' = (-1)^k \frac{mg}{a} \cos^2 \alpha.$$

Stabilne ravnovesne lege so pri sodih k . Pri teh je harmonična aproksimacija periode enaka

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''}} = 2\pi \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Enak rezultat dobimo, če upoštevamo formulo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g\kappa}}.$$