

2. kolokvij iz Mehanike

13. januar 2022

1. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = r_0(2 + \sin \varphi)$.
 - (a) Izračunaj pripadajočo silo.
 - (b) Skiciraj tir in izračunaj v kolikšnem času točka obkroži center sile.
 - (c) Določi efektivni potencial ter kvalitativno obravnavaj možna gibanja. Pri katerem pogoju na vrtilno količino obstaja za ta potencial krožni tir.
 - (d) Izračunaj energijo danega gibanja.
2. Premica se enakomerno s kotno hitrostjo ω_0 vrti okrog osi s katero oklepa kot α , po točki pa je brez trenja gibljiva materialna točka z maso m . Na točko deluje sila teže v smeri osi vrtenja.
 - (a) Zapiši enačbe gibanja v RKS, ki se vrti hkrati s premico.
 - (b) Ali obstaja ravnovesni položaj. Če obstaja, ga določi. Ali je stabilen?
 - (c) Reši enačbe gibanja.
3. Za polelipsoid
$$\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad \text{in} \quad z \geq 0\}.$$
 - (a) položaj masnega središča;
 - (b) vztrajnostni tenzor s polom v središču osnovne ploskve;
 - (c) vztrajnostni tenzor s polom v masnem središču.
4. Veternica v obliki kvadrata se vrti okrog svoje diagonale.
 - (a) Določi vztrajnostni tenzor kvadratne plošče in vztrajnostni moment okrog diagonale kvadrata.
 - (b) Na vetrnico deluje linearen upor zraka, vrtenje vetrnice pa poganja navor M_0 . Zapiši enačbe gibanja in določi navor M_0 , da se bo vetrnica enakomerno vrtela.

Rešitve

1. (a) Uporabimo Binetovo formulo $a_r = -C_0^2 u^2(u + u'')$, kje je $u = 1/r$. Tu je r brezdimenzijska razdalja do centra sil. Dimenzijsko obliko dobimo s substitucijo $r \rightarrow r_0 r$. Po krajšem računu dobimo

$$u'' = \frac{\sin \theta}{(2 + \sin \theta)^2} + \frac{2 \cos^2 \theta}{(2 + \sin \theta)^3}.$$

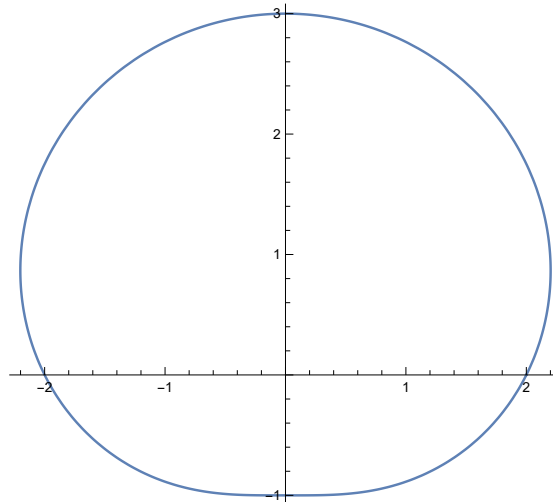
Uporabimo zvezo $\sin \theta = r - 2$. Tako dobimo

$$u'' = -\frac{6}{r^3} + \frac{6}{r^2} - \frac{1}{r}$$

in

$$F = ma_r = -6C_0^2 \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^5} \right).$$

- (b) Skica tira je Točka obkroži center sile v času $T = 2A/C_0$, kjer je A površina lika, ki ga



omejuje tir. Izračunajmo

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \frac{9\pi}{2}.$$

- (c) Potencial sile je

$$V = - \int F dr = mC_0^2 \left(\frac{3}{2r^4} - \frac{2}{r^3} \right),$$

pripadajoči efektivni potencial pa

$$U = V + \frac{l^2}{2mr^2} = \frac{l^2}{2mr^2} \left(1 - \frac{4}{r} + \frac{3}{r^2} \right).$$

Vrednost vrtilne količine ne vpliva na obstoj krožnega tira. Ta obstaja neodvisno od l , pri pogoju, da ima potencial stacionarno točko. Izračunajmo

$$U' = -\frac{l^2}{mr^4} (6 - 6r + r^2).$$

Rešitvi enačbe sta $r_1 = 3 - \sqrt{3}$ in $r_1 = 3 + \sqrt{3}$. Prva rešitev je lokalni minimum, druga maksimum.

- (d) Energija danega gibanja je $E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + V$. Izračunajmo posebej $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Upoštevajmo, da je $\dot{r} = \dot{\theta} \cos \theta$. Potem

$$\dot{r}^2 = (-r^2 + 2r - 3) \frac{C_0^2}{r^4}$$

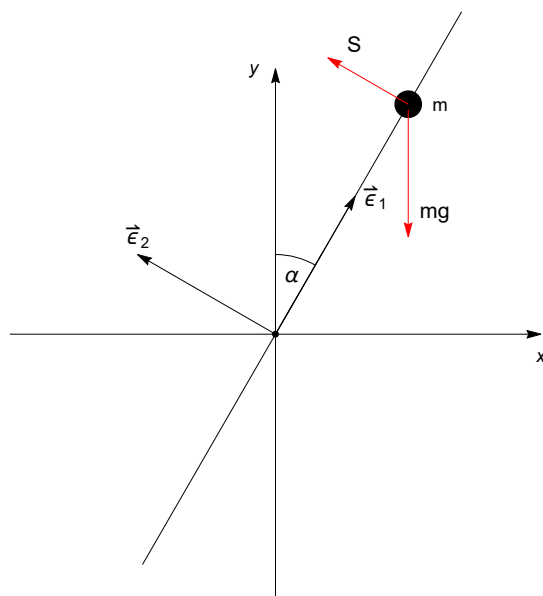
in po krajšem računu

$$v^2 = \frac{C_0^2}{r^4} (2r - 3).$$

Energija je potem

$$E_0 = \frac{1}{2}m \frac{C_0^2}{r^4} (2r - 3) + mC_0^2 \left(\frac{3}{2r^4} - \frac{2}{r^3} \right) = 0.$$

2. Postavimo koordinatna sistema tako kot kaže slika.



- (a) Na točko deluje sila teže v negativni smeri osi y in sila vezi $\vec{S}$, ki je po predpostavki, da je gibanje brez trenja, v smeri, ki je pravokotna na smer gibanja. Velja torej $\vec{S} = S_2\vec{e}_2 + S_3\vec{e}_3$. Položaj točke je $\vec{r} = \zeta\vec{e}_1$. Gibalna enačba v RKS je

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = m\vec{g} + \vec{S} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}.$$

Tu je $\vec{\omega} = \omega\vec{j} = \omega(\cos \alpha\vec{e}_1 + \sin \alpha\vec{e}_2)$. Pri zapisu enačbe smo upoštevali, da se RKS vrti enakomerno in da imata RKS in AKS skupno izhodišče. Izračunajmo posebej

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 (\cos \alpha\vec{e}_1 + \sin \alpha\vec{e}_2) \times ((\cos \alpha\vec{e}_1 + \sin \alpha\vec{e}_2) \times \zeta\vec{e}_1) = -\omega^2 \zeta \sin \alpha (\sin \alpha\vec{e}_1 - \cos \alpha\vec{e}_2).$$

in

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} = \omega(\cos \alpha\vec{e}_1 + \sin \alpha\vec{e}_2) \times \dot{\zeta}\vec{e}_1 = -\omega\dot{\zeta} \sin \alpha\vec{e}_3.$$

Newtonova enačba je

$$m\ddot{\vec{\epsilon}}_1 = -mg(\cos\alpha\vec{\epsilon}_1 + \sin\alpha\vec{\epsilon}_2) + S_2\vec{\epsilon}_2 + S_3\vec{\epsilon}_3 + m\omega^2\zeta\sin\alpha(\sin\alpha\vec{\epsilon}_1 - \cos\alpha\vec{\epsilon}_2) + 2m\omega\dot{\zeta}\sin\alpha\vec{\epsilon}_3,$$

oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} m\ddot{\zeta} &= -mg\cos\alpha + m\omega^2\zeta\sin^2\alpha \\ 0 &= -mg\sin\alpha + S_2 - m\omega^2\zeta\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 &= S_3 + 2m\omega\dot{\zeta}\sin\alpha \end{aligned}$$

- (b) V ravnovesnem položaju je $\dot{\zeta} = \ddot{\zeta} = 0$. Iz prve enačbe zgoraj potem sledi

$$g\cos\alpha = \omega^2\zeta\sin^2\alpha.$$

Ravnovesni položaj obstaja pri pogoju $\alpha \neq 0$ in je pri

$$\zeta_1 = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}.$$

V ravnovesnem položaju centrifugalna sila uravnovesi silo teže. Pomik v $\zeta > \zeta_1$ centrifugalno silo poveča in točka odleti v $\zeta \rightarrow \infty$, pomik v $\zeta < \zeta_1$ pa centrifugalno silo zmanjša in točka odleti v $\zeta \rightarrow -\infty$.

- (c) Rešiti moramo enčbo

$$\ddot{\zeta} - k^2\zeta = -g\cos\alpha,$$

kjer je $k = \omega\sin\alpha$. Rešitev homogene enačbe je $\zeta_0 = A\cosh kt + B\sinh kt$, partikularna rešitev pa je ζ_1 . Splošna rešitev je torej

$$\zeta = A\cosh kt + B\sinh kt + \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}.$$

3. (a) Privzeli bomo, da je polelipsoid homogen. Očitno je masno središče na osi z . Velja

$$z_* = \frac{1}{V} \int_V z dV.$$

. Volumen polelipsoida je $V = \frac{2\pi}{3}abc$. Integral pa je enak

$$\int_V z dV = abc^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta r \cos\theta.$$

To smo polelipsoid prvo središčno raztegnili/skrčili v enotsko polkroglo, nato pa uporabili krogelne koordinate. Integral je

$$\int_V z dV = 2\pi abc^2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \pi abc^2.$$

Masno središče je tako

$$z_* = \frac{3}{8}c.$$

- (b) Za izračun vztrajnostnega tenzorja moramo izračunati momente

$$K_x = \int_V x^2 dV, \quad K_y = \int_V y^2 dV \quad \text{in} \quad K_z = \int_V z^2 dV.$$

Momente računamo podobno kot masno središče. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
 K_x &= a^3 bc \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta \\
 &= \frac{1}{5} a^3 bc \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{\pi}{5} a^3 bc \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{\pi}{5} a^3 bc \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{15} a^3 bc.
 \end{aligned}$$

Iz osne simetrije polkrogle sledi

$$K_y = \frac{2\pi}{15} ab^2 c.$$

Izračunati moramo še

$$\begin{aligned}
 K_z &= abc^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta r^2 \cos^2 \theta \\
 &= \frac{2\pi}{5} abc^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{15} abc^3.
 \end{aligned}$$

Vztrajnostni momenti so

$$\begin{aligned}
 J_x &= (K_y + K_z) = \frac{1}{5} m(b^2 + c^2) \\
 J_y &= (K_x + K_z) = \frac{1}{5} m(a^2 + c^2) \\
 J_z &= (K_x + K_y) = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2)
 \end{aligned}$$

Izvendiagonalne komponente vztrajnostnega tenzorja so enake nič.

(c) Uporabimo Steinerjev izrek. V matričnem zapisu je

$$\underline{\underline{J}}_* = \frac{1}{5} m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} - \frac{9}{64} mc^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{9}{64} mc^2 \vec{k} \otimes \vec{k}$$

in končno

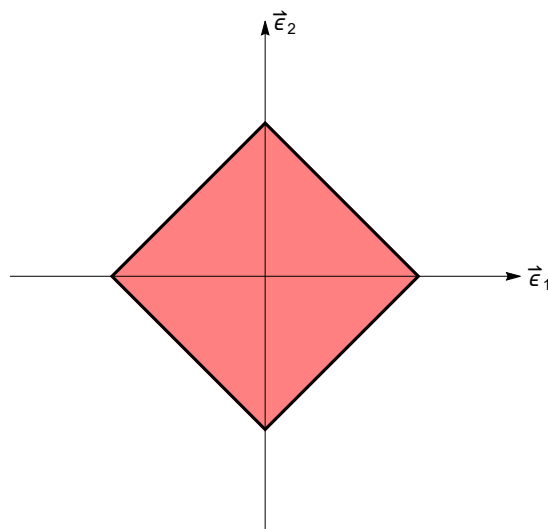
$$\underline{\underline{J}}_* = \frac{1}{5} m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} - \frac{9}{64} mc^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Postavimo koordinatni sistem v središče kvadrata in usmerimo osi x in y v smeri stranic kvadrata. Zaradi simetrije je očitno $J_x = J_y$. Označimo z a dolžino stranice kvadrata in izračunajmo Izračunajmo

$$J_x = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy y^2 = 2a\rho \int_0^{a/2} dy y^2 = \frac{2}{3} a\rho \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} ma^2.$$

Ker je $J_y = J_x$, je vztrajnostni moment J okrog glavne diagonale prav tako enak

$$J = \frac{1}{12} ma^2 \tag{1}$$



(b) Enačba vrtenja vetrnice je

$$J\ddot{\varphi}\vec{e} = \vec{N} + N_0\vec{e}. \quad (2)$$

Tu je $\vec{e}$ enotski vektor v smeri osi rotacije, $\vec{N}$ je navor upora zraka, N_0 pa je navor motorja. Izračunati moramo navor upora. Telesni koordinatni sistem z bazo $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ izberemo tako, da je os $\vec{e}_2$ v smeri osi rotacije $\vec{e}$, glej skico. Potem je

$$\vec{N} = \int_A d\vec{N} = \int_A \vec{\zeta} \times \vec{f} dA = - \int_A \vec{\zeta} \times \mu \vec{v} dA = -\mu \int_A \vec{\zeta} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) dA.$$

Tu je A kvadrat, μ pa koeficient v linearnem zakonu upora zraka. Vektor kotne hitrosti rotacije vetrnice je $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}$. Potem je

$$\begin{aligned} \vec{N} &= -\mu \int_A \vec{\zeta} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) dA \\ &= -\mu \dot{\varphi} \int_A \vec{\zeta} \times (\vec{e} \times \vec{\zeta}) dA \\ &= -\mu \dot{\varphi} \int_A \left(|\vec{\zeta}|^2 - (\vec{\zeta} \cdot \vec{e}) \vec{\zeta} \right) dA \\ &= -\mu \dot{\varphi} \int_A \left(|\vec{\zeta}|^2 \underline{I} - \vec{\zeta} \otimes \vec{\zeta} \right) dA \dot{\varphi} \vec{e} \\ &= -\mu \underline{J} \dot{\varphi} \vec{e} \\ &= -\mu J \dot{\varphi} \vec{e}. \end{aligned}$$

Iz enačbe (2) potem sledi

$$J\ddot{\varphi} = -\mu J \dot{\varphi} + N_0,$$

oziroma

$$J\dot{\omega} = -\mu J \omega + N_0.$$

Vetrnica se enakomerno vrti, če je $\dot{\omega} = 0$. Iskani navor motorja je potem

$$N_0 = \mu J \omega_0,$$

kjer je ω_0 kotna hitrost enakomerne rotacije.