

3. izpit iz Elementarne geometrije

18. avgust 2021

1. (a) [10] Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v nevtralni ravnini. Z uporabo Hilbertovih aksiomov pokaži, da obstaja očrtana krožnica trikotnika $\triangle ABC$ natanko takrat, ko simetrali stranic AB in AC nista vzporedni.
(b) [10] Ali za vsak trikotnik v nevtralni ravnini obstaja njemu očrtana krožnica? Trditev dokaži z uporabo Hilbertovih aksiomov oziroma ovrži s protiprimerom v ustreznem modelu.
2. (a) [15] V evklidski ravnini je dan ostrokotni trikotnik $\triangle ABC$. Označimo s H_C nožišče višine na stranico AB ter z D in E pravokotni projekciji H_C na stranici AC in BC . Pokaži, da točke A , B , D in E ležijo na isti krožnici.
(b) [15] V evklidski ravnini je dan trikotnik $\triangle ABC$ s koti $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{8}$ in $\gamma = \frac{5\pi}{8}$. Označimo s C' nožišče višine na stranico AB , z B' središče stranice AC in z A' presečišče simetrale kota pri A s stranico BC . Pokaži, da se premice $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ in $\overleftrightarrow{CC'}$ sekajo v isti točki.
3. V evklidski ravnini je dan topokotni trikotnik $\triangle ABC$ s topim kotom pri C . Označimo z A' in B' pravokotni projekciji točke C na simetrali kotov pri A in B ter z I središče trikotniku včrtane krožnice.
(a) [10] Pokaži, da je $\angle ICA' = \angle IB'A'$.
(b) [10] Pokaži, da sta premici \overleftrightarrow{AB} in $\overleftrightarrow{A'B'}$ vzporedni.

4. Označimo s

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

Poincaréjev krožni model hiperbolične ravnine.

- (a) [15] Za $R > 0$ naj bo K_R krožnica v \mathbb{R}^2 z enačbo $(x - 1)^2 + (y - R)^2 = R^2$. Pokaži, da množica $p_R = \mathcal{H} \cap K_R$ določa neko P -premico. Nato ugotovi, za katere R se sekata P -premica p_R in P -premica skozi točki $(0, 0)$ in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- (b) [15] Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Pokaži, da v \mathcal{H} obstaja pravokotni trikotnik, ki ima vsoto notranjih kotov manjšo od $\frac{\pi}{2} + \epsilon$.