

Numerične metode 2021/22: 2. domača naloga

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-dn2.zip` in jih oddajte preko učilnice najkasneje dan pred kvizom.

1. Sistemi nelinearnih enačb.

Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned}x^5 + y^5 - 5xy &= 1, \\ x^2 + ye^{y^2} &= 1.\end{aligned}$$

Sistem rešujemo s tremi različnimi metodami z začetnim približkom $\mathbf{x}^{(0)} = [0.5, -0.5]^T$, številom korakov $N = 100$ in toleranco 10^{-5} . Vsako izmed metod izvajamo, dokler ne presežemo števila korakov N , oz. dokler je druga norma razlike dveh zaporednih približkov večja od tolerance. Pri implementaciji metod si lahko pomagata s priloženimi Matlab predlogami.

(a) Navadna iteracija.

Implementirajte navadno iteracijo za reševanje sistema nelinearnih enačb in jo preizkusite na danem sistemu enačb. Za iteracijsko funkcijo vzemite desno stran preoblikovane sistema:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[5]{1 + 5xy - y^5}, \\ y &= \frac{1 - x^2}{e^{y^2}}.\end{aligned}$$

Naj $\rho(A)$ označuje spektralni radij matrike A (po absolutni vrednosti največja lastna vrednost). Pogoji za konvergenco navadne iteracije je, da velja $\rho(J_G(\alpha)) < 1$, kjer je α negibna točka iteracijske funkcije G . Ali je v zgornjem primeru zadoščeno pogoju spektralnega radija za navadno iteracijo?

(b) Newtonova metoda.

Implementirajte Newtonovo metodo za reševanje sistema nelinearnih enačb in jo preizkusite na danem sistemu enačb.

(c) Broydenova metoda.

Implementirajte Broydenovo metodo za reševanje sistema nelinearnih enačb in jo preizkusite na danem sistemu enačb. Za začetni približek matrike B_0 vzemite $J_F(\mathbf{x}^{(0)})$, nato pa matriko B_r v vsakem koraku popravite po pravilu

$$B_{r+1} = B_r + \frac{F(\mathbf{x}^{(r+1)})\Delta\mathbf{x}^{(r)T}}{\Delta\mathbf{x}^{(r)T}\Delta\mathbf{x}^{(r)}}.$$

Primerjajte število korakov posameznih metod, vse izračunane približke in napake dobljenih približkov (odstop od dovolj točne rešitve, ki jo dobite z ukazom `fsolve`).

2. Metoda najmanjših kvadratov.

(a) Podane so točke:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1.1	1.05	1.02	0.95	0.87	0.77
y_i	0.53	0.43	0.39	0.32	0.27	0.22

i	7	8	9	10	11	12
x_i	0.67	0.56	0.44	0.30	0.16	0.01
y_i	0.18	0.15	0.13	0.12	0.13	0.15

Po metodi najmanjših kvadratov poiščite polinom stopnje 7, ki se najbolj prilega danim podatkom. Dobljeni predoločen sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešite z uporabo normalnega sistema po postopku:

- $B = A^T A$,
- $\mathbf{c} = A^T \mathbf{b}$,
- $B = V^T V$,
- $V\mathbf{y} = \mathbf{c}$,
- $V^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Dobljeno rešitev primerjajte z rešitvijo, dobljeno z direktnim reševanjem sistema (s pomočjo Matlabovega ukaza `\`). Naj bo $\mathbf{x}$ rešitev, dobljena s pomočjo normalnega sistema, in $\tilde{\mathbf{x}}$ direktna rešitev. Koliko je $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2$?

(b) Poiščite koeficiente A, B, C, D in E stožnice

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 1,$$

ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolj prilega točkam (x_i, y_i) , ki so podane v datoteki `tocke.txt`. Dobljeni sistem lahko rešite s pomočjo ukaza `\`.

(c) Poskrbite, da imate implementiran algoritem za Givensove rotacije.