

8 Prostori zveznih preslikav

Naloga 8.1. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ in naj bo množica $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ opremljena s topologijo enakomerne konvergence. Dokazite, da je preslikava $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ zvezna.

Namig. Prostor $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ je metrizabilen in dana preslikava je Lipschitzova.

Naloga 8.2. Naj bo X topološki prostor in $K \subseteq X$ neprazna kompaktna podmnožica. Množico $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ opremimo s kompaktno-odprto topologijo. Dokazite, da je preslikava $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \max f_*(K)$ zvezna.

Naloga 8.3. Naj bosta X in Y topološka prostora. Dokazite naslednji trditvi.

- (a) Topologija konvergence po točkah je šibkejša od kompaktno-odprte topologije na $\mathcal{C}(X, Y)$. Če je X diskreten prostor, se ti topologiji ujemata.
- (b) Naj bo Y metričen prostor. Topologija enakomerne konvergence je močnejša od kompaktno-odprte topologije. Če je X kompakten, se ti topologiji ujemata.

Naloga 8.4. Naj bosta X in Y topološka prostora. **Evalvacija** je preslikava

$$ev: \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y, \quad ev(f, x) := f(x).$$

Dokazite naslednji trditvi, če opremimo $\mathcal{C}(X, Y)$ s kompaktno-odprto topologijo.

- (a) Evalvacija je zvezna v vsaki spremenljivki posebej.
- (b) Če je X lokalno kompakten, je evalvacija zvezna.

Pri tem uporabite definicijo lokalne kompaktnosti, ki deluje tudi za ne nujno Hausdorffove prostore: X je lokalno kompakten, kadar za vsak $x \in X$ in vsako odprto okolico $U \subseteq X$ točke x obstajata $V, K \subseteq X$, tako da je V odprt v X , K kompakten in $x \in V \subseteq K \subseteq U$ („vsaka točka v X ima poljubno majhne kompaktne okolice“).

Naloga 8.5. Topološki prostor zadošča ločljivostni lastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$, kadar za vsako točko $a \in X$ in vsako zaprto podmnožico $A \subseteq X$, ki ne vsebuje točke a , obstaja zvezna preslikava $f: X \rightarrow [0, 1]$, za katero velja $f(a) = 0$ in $f(x) = 1$ za vse $x \in A$. Prostor je **popolnoma regularen**, kadar zadošča lastnostma $T_{3\frac{1}{2}}$ in T_0 . Dokazite naslednje trditve.

- (a) $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$.
- (b) Vsak normalen prostor je popolnoma regularen in vsak popolnoma regularen prostor je tudi Hausdorffov in regularen.
- (c) Vsak metrični prostor zadošča lastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$ (dokažite s pomočjo prejšnje točke in neposredno).
- (d) Lastnost $T_{3\frac{1}{2}}$ je dedna.
- (e) Lastnost $T_{3\frac{1}{2}}$ je produktna. Sklepajte, da neprazna topološka prostora X in Y zadoščata lastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$ natanko tedaj, ko ji zadošča produkt $X \times Y$.