

9 Za zabavo ter čast in slavo

Naloga 9.1. Dan je naslednji podprostor evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$:

$$A := \text{Cl}_{\mathbb{R}^2} \left(\left\{ (x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \mid y = \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right\} \right).$$

Poiščite homeomorfizem med prostoroma $X := \mathbb{R}^2 \setminus A$ in $\mathbb{R}^2$.

Naloga 9.2. Naj bo τ_E evklidska topologija na $\mathbb{R}$ in τ_T trivialna topologija na $\mathbf{2} := \{0, 1\}$. Ali obstajata topološka prostora (A, τ_A) in (B, τ_B) , da velja:

- topologiji τ_A in τ_B nista trivialni,
- $(A, \tau_A) \times (B, \tau_B) \approx (\mathbb{R}, \tau_E) \times (\mathbf{2}, \tau_T)$?

Naloga 9.3. Dan je naslednji podprostor evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$:

$$X := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})).$$

Ali je prostor X povezan? Ali je povezan s potmi?

Naloga 9.4. Naj bo $(X_i)_{i \in I}$ družina topoloških prostorov (topologijo na X_i označimo s τ_i). **Produktna topologija** na množici $\prod_{i \in I} X_i$ je dana s podbazo

$$\{\pi_k^*(U) \mid k \in I, U \in \tau_k\},$$

kjer je $\pi_k: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_k$ projekcija.

- (a) Preverite, da je produktna topologija najšibkejša topologija, glede na katero so vse projekcije zvezne.
- (b) Preverite, da se v primeru produkta dveh topoloških prostorov zgoraj opisana produktna topologija ujema s topologijo, dano s škatlastimi podmnožicami.
- (c) Množici $2 := \{0, 1\}$ in $\mathbb{N}$ opremimo z diskretno topologijo. Množice

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} 2, \quad 2^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{C}(\mathbb{N}, 2)$$

lahko poistovetimo (vse predstavljajo množico dvojiških zaporedij). Pokažite, da se produktna topologija, topologija konvergence po točkah in kompaktno-odprta topologija ujemajo. Dokažite, da dobljeni prostor (imenuje se **Cantorjev prostor**) ni diskreten (še več, nobena njegova točka ni izolirana). Sklepajte, da v produktih neskončno mnogo faktorjev “škatlaste množice” oblike $\prod_{i \in I} U_i$, kjer $U_i \in \tau_i$, v splošnem niso odprte.

- (d) Dokažite splošneje: če je X topološki prostor in indeksno množico I opremimo z diskretno topologijo, se množice

$$\prod_{i \in I} X, \quad X^I, \quad \mathcal{C}(I, X)$$

ujemajo in na njih se ujemajo produktna topologija, topologija konvergence po točkah ter kompaktno-odprta topologija.

- (e) Za $n \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$ dokažite: če vsi X_i zadoščajo ločljivostni lastnosti T_n , tedaj tudi produkt $\prod_{i \in I} X_i$ zadošča lastnosti T_n .

Naloga 9.5. Dokažite **Alexandrov izrek**: če je $\mathcal{P}$ podbaza topološkega prostora X , tedaj je X kompakten natanko tedaj, ko ima vsako pokritje iz $\mathcal{P}$ končno podpokritje. *Nasvet.* Predpostavite, da ima vsako podbazno pokritje končno podpokritje, X pa ni kompakten. Uporabite Zornovo lemo na delno urejeni množici odprtih pokritij brez končnih podpokritij. Pokažite, da že podbazne množice iz maksimalnega takega pokritja pokrivajo X , in izpeljite protislovje.

Naloga 9.6. S pomočjo Alexandrovega izreka izpeljite **izrek Tihonova**: če je $(X_i)_{i \in I}$ družina kompaktnih topoloških prostorov, je tudi produkt $\prod_{i \in I} X_i$ kompakten.

Naloga 9.7. Prostor zveznih funkcij $\mathcal{C}(X, Y)$ opremimo s kompaktno-odprto topologijo. Dokažite: če je X diskreten in Y kompakten, tedaj je $\mathcal{C}(X, Y)$ kompakten. Poiščite primer kompaktnih prostorov X in Y , ko $\mathcal{C}(X, Y)$ ni kompakten.

Naloga 9.8. Naj bo X topološki prostor in naj bo interval $\mathbb{I} := [0, 1]$ opremljen z evklidsko topologijo. Definirajmo preslikavo

$$\phi: X \rightarrow \prod_{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{I})} \mathbb{I}, \quad (1)$$

$$\phi(x) := \left(f(x) \right)_{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{I})}. \quad (2)$$

Kodomeno preslikave ϕ opremimo s produktno topologijo. Dokažite naslednje trditve.

- (a) Prostor $\prod_{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{I})} \mathbb{I}$ je kompakten Hausdorffov.
- (b) Preslikava ϕ je zvezna.
- (c) Preslikava ϕ je injektivna natanko tedaj, ko množica $\mathcal{C}(X, \mathbb{I})$ loči točke v X . Prostor s to lastnostjo se imenuje **popolnoma Hausdorffov**. Preverite, da je vsak popolnoma regularen prostor popolnoma Hausdorffov in da je vsak popolnoma Hausdorffov prostor tudi Hausdorffov.
- (d) Preslikava ϕ je topološka vložitev natanko tedaj, ko je X popolnoma regularen.
- (e) Zaprtje zaloge vrednosti preslikave ϕ , ki ga označimo z βX , je kompakten Hausdorffov prostor.

Preko preslikave ϕ lahko popolnoma regularen prostor X poistovetimo z gostim podprostorom v βX . Prostor βX se imenuje **Stone-Čechova kompaktifikacija** prostora X .

- (f) Topološki prostor je popolnoma regularen natanko tedaj, ko ga je možno vložiti v normalen prostor („popolnoma regularni prostori so natanko podprostori normalnih prostorov“, „popolna regularnost je dedni del normalnosti“).

Naloga 9.9. Naj bo M metrični prostor, interval $\mathbb{I} := [0, 1]$ opremljen z evklidsko topologijo in $\mathcal{C}(M, \mathbb{I})$ opremljen s topologijo konvergence po točkah. Dokazite, da so naslednje trditve ekvivalentne.

- (a) Prostor M je kompakten.
- (b) Vsaka zvezna preslikava $M \rightarrow \mathcal{C}(M, \mathbb{I})$ je zaprta.
- (c) Vsaka vložitev $M \rightarrow \mathcal{C}(M, \mathbb{I})$ je zaprta.