

Numerične metode: 1. izpit

1. 2. 2021

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 80 točk. Veliko uspeha!

1. naloga (20 točk)

Vzemimo sistem decimalnih števil s premično piko $P = \mathcal{P}(b, t, L, U)$, kjer je baza b enaka 2, velikost mantise t enaka 4, spodnja in zgornja meja za eksponent pa sta enaki $L = -2$, $U = 3$. Števila zapišemo z uporabo 8 bitov, za zapis pa uporabimo normalizirano obliko v dvojiškem, ko število zapišemo kot $1.mmmm \cdot 2^e$. Izmed 8 bitov je prvi rezerviran za predznak, naslednji 3 za eksponent in naslednji $t = 4$ za mantiso. Biti na desni predstavljajo manj pomembne številke. Eksponent L predstavimo kot 001, eksponent U pa kot 110.

a) (10) Ali je število $x = 5/8$ predstavljivo v P ? Zapišite najboljši približek za x znotraj P v obliki $\pm m \cdot b^e$ in kot niz 8 bitov. Katero število predstavlja 11001000?

b) (8) V obliki $\pm m \cdot b^e$, kot niz 8 bitov in kot desetiško vrednost zapišite:

- največje pozitivno število, predstavljivo v P ,
- največje subnormalizirano negativno število, predstavljivo v P .

c) (2) Koliko je osnovna zaokrožitvena napaka u za števila iz P ?

2. naloga (20)

Za iskanje $\sqrt{a}$, $a > 0$, so predlagane naslednje metode:

1. bisekcija funkcije $f(x) = x^2 - a$, z začetnim intervalom $[0, a]$,
2. $x_{n+1} = x_n^4 - 2a^2(x_n^2 - a^2)$, $x_0 = a/2$,
3. $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$, $x_0 = a$.

Komentirajte konvergenco posameznih metod za vse $a > 0$. Katero bi izbrali?

3. naloga (20 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

tridiagonalna matrika.

a) (15) Razvijte učinkovit algoritem, ki preveri, ali je A simetrična in pozitivno definitna. Namig: pomagajte si z razcepom Choleskega.

b) (5) Preštejte število potrebnih operacij za izračun. Rezultat zapišite v obliki $kn + \mathcal{O}(1)$.

4. naloga (20 točk)

Dan je sistem $p + q$ enačb s $p + q$ neznankami

$$B \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & A \\ A^T & -I \end{bmatrix}, \quad (1)$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ in $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^q$.

a) (5) Dokazite, da je B nesingularna.

Namig: za poljubno matriko X velja $\lambda_i(X + I) = 1 + \lambda_i(X)$.

b) (5) Denimo, da poznamo $\|A\|_F$. Zapišite hiter algoritem za izračun $\|B\|_F$ in preštejte število potrebnih operacij.

c) (10) Označimo z $[\mathbf{y}^* \ \mathbf{x}^*]^T$ rešitev sistema (1). Dokazite, da $\mathbf{x}^*$ minimizira izraz

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \|\mathbf{x} + \mathbf{c}\|_2^2.$$