

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka						

Ime in priimek

Naloga 1 [20 točk]

Naj bo $a > 0$. Podano je iteracijsko zaporedje

$$x_{r+1} = \alpha x_r (1 - \beta a x_r^2), \quad r = 0, 1, \dots$$

- Določite parametra α in β tako, da bo za začetni približek dovolj blizu $\frac{1}{\sqrt{a}}$ veljalo $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = \frac{1}{\sqrt{a}}$ in da bo red konvergence vsaj kvadratičen.
- Kolikšen je red konvergence izpeljane metode?
- Naj bo $a = 2$. Z izpeljano metodo in začetnim približkom $x_0 = \frac{1}{2}$ želimo določiti $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ali bo metoda konvergirala? Odgovor utemeljite z računom.

Naloga 2 [20 točk]

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \end{bmatrix}, \quad 0 < a < 1.$$

- Izračunajte LU razcep $PA = LU$ matrike A z delnim pivotiranjem.
- Kako moramo izbrati a , da bo veljalo $\|U\|_F = \frac{9}{4}$?
- Za matriko A izvedemo še LU razcep $PAQ = LU$ s kompletnim pivotiranjem. Glede na vrednost parametra a določite determinanto matrike P .

Naloga 3 [20 točk]

Z uporabo Householderjevih zrcaljenj rešite sistem enačb

$$2x + 7y = 2, \quad -2x + 5y = 4, \quad 2x + 7y = 4 \quad \text{in} \quad -2x + 5y = 0$$

po metodi najmanjših kvadratov.

Naloga 4 [20 točk]

Podana je matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$. Sled matrike $A^T A$ želimo izračunati na dva načina.

- Direktno.* Zapišite ekonomičen postopek za direktni izračun sledi matrike $A^T A$ in preštejte število operacij.
- S pomočjo QR razcepa.* Denimo, da poznamo QR razcep za matriko A , torej $A = QR$. Zapišite ekonomičen postopek za izračun sledi matrike $A^T A$ in preštejte število operacij.
- Kdaj je postopek iz točke a) učinkovitejši od postopka iz točke b)?