

Optimizacijske metode: 2. izpit

30. junij 2020

Čas pisanja je 90 minut. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Poišči optimalno rešitev problema vezanih ekstremov z neenačbami

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 + y^2 - y \ln x \\ & -x + 6y \geq 17 \\ & x \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Natančno utemelji, da so vsi pogoji za optimalnost izpolnjeni.

Namig: optimalna rešitev je celoštevilska.

2. naloga (25 točk)

Rimski general sestavlja vojsko za osvajalski pohod. V svoji vojski ima lahko služabnike, vojake, konje in slone. V spodnji tabeli so zbrani podatki, ki jih ima na voljo.

	tedenska ¹ poraba hrane	nosilnost hrane	vojaška moč	največje število
služabnik	4 kg	30 kg	0	20 000
vojak	8 kg	20 kg ²	1	5 000
konj	50 kg	300 kg	5	200
slon	1500 kg	3 000 kg	100	50

General mora priskrbeti hrane za en teden, zato želi vojsko sestaviti tako, da bo potrebovala čim manj hrane. Celotna vojska mora imeti nosilnost vsaj za 4 tedne svoje porabe (dodatno hrano bodo pridobivali sproti z nabiranjem in plenjenjem). Da bo pohod uspešen, general ocenjuje, da mora biti skupna moč vojske vsaj 5 000.

Na vsake štiri vojake mora v vojski biti vsaj en služabnik. Poleg tega mora za vsakega konja v vojski biti vsaj en vojak in vsaj en služabnik, za vsakega slona pa trije vojaki in deset služabnikov (pri čemer služabniki za žival ne štejejo v kvoto za pripadajoče vojake).

Primer: če je v vojski en konj in en slon, potem morajo biti v vojski tudi vsaj $1 + 3 = 4$ vojaki in $1 + 10 + 4/4 = 12$ služabnikov.

a) (10 točk) Za zgornji problem zapiši linearni program v standardni obliki. Linearnega programa **ne rešuj!**

b) (15 točk) Dokaži, da je optimalna sestava vojske 2000 služabnikov, 4000 vojakov, 200 konj in 0 slonov³.

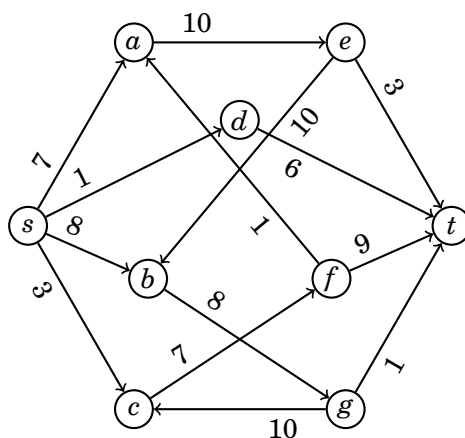
¹Rimski teden (*nundinum*) je imel 8 dni.

²Vojak nosi še svoje orožje, zato lahko nese manj hrane.

³Rimljani so osvojili nekaj ozemelj, kjer so v bitkah uporabljali slone, in jih poskušali vključiti v svoje vojskovanje, a so na koncu sklenili, da se jim to ne izplača.

3. naloga (25 točk)

Poišči maksimalen pretok od vozlišča s do vozlišča t na spodnjem grafu ter ustrezni minimalen prerez.



4. naloga (25 točk)

Dana je množica

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

a) (5 točk) Skiciraj množico A .

b) (20 točk) Določi konveksno ovojnico množice A . Svojo trditev utemelji.