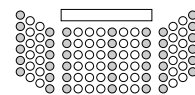


Analiza 3: 1. izpit

28. 1. 2021 9⁰⁰ – 11⁰⁰

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

Ime in priimek _____



Sedež (2.01)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Dan naj bo integral s parametrom

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^a \ln(1+t^2)} dt.$$

- a) Določi konvergenčno območje integrala $I(a)$.
- b) Ali je $I(a)$ odvedljiva funkcija? Odgovor utemelji!
- c) Izračunaj $I'(2)$.

Rešitev:

Velja

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{(1+t^2)^a \ln(1+t^2)} = L'Hop = 1,$$

torej je pri spodnji meji funkcija omejena ($\ln(1+t^2)$ torej ne dela problemov).

Pri zgornji meji $t = \infty$ pa preoblikujemo

$$\int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^a \ln(1+t^2)} dt = \int_1^\infty \frac{\frac{t^{2a}}{(1+t^2)^a \ln(1+t^2)}}{t^{2a-2}} dt.$$

Če je $2a - 2 > 1$, oz. $a > \frac{3}{2}$, potem zaradi dejstva da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{2a}}{(1+t^2)^a \ln(1+t^2)} = 0,$$

sledi da integral konvergira.

Za $a \leq \frac{3}{2}$ pa velja

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^a \ln(1+t^2)} dt &\geq \int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1+t^2)} dt \geq \\ &\geq \int_1^\infty \frac{t^2}{(2t^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1+t^2)} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^\infty \frac{1}{t \ln(1+t^2)} dt \geq \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^\infty \frac{1}{t(1+2\ln t)} dt = \int_0^\infty \frac{du}{1+2u} \rightarrow \text{divergira}. \end{aligned}$$

Konvergenčno območje je torej interval $(\frac{3}{2}, \infty)$.

Velja

$$I'(a) = - \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^a} dt,$$

saj na poljubnem intervalu $[c, \infty) \subset (\frac{3}{2}, \infty)$ velja

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^a} \leq \frac{t^2}{(1+t^2)^c}$$

in $\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^c} dt$ konvergira, kar po Weierstrassovem kriteriju implicira, da originalni integral konvergira enakomerno na $[c, \infty)$. Torej je $I(a)$ odvedljiva na $(\frac{3}{2}, \infty)$ in velja

$$I'(a) = - \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^a} dt.$$

Velja

$$I'(2) = - \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{2}}}{(1+u)^2} du = -\frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

2. naloga (25 točk)

Dan naj bo ravninski lik

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^3 \leq x^4, x \geq 0\}.$$

Določi vztrajnostni moment okoli x -osi, homogenega telesa T , ki ga dobimo, ko lik D zavrtimo okoli x -osi.

Nasvet: Uporabi modificirane sferične koordinate, in sicer:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \vartheta \\y &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\z &= r \sin \vartheta \sin \varphi\end{aligned}$$

Rešitev:

Če lik zavrtimo okoli x -osi, dobimo telo, ki ga lahko opišemo kot

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq x^4, x \geq 0\}.$$

V modificiranih sferičnih koordinatah (iz nasveta), potem dobimo

$$r \leq \cos^2 \vartheta$$

od koder potem vidimo ($y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$), da velja

$$\begin{aligned}J_x &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\cos^2 \vartheta} r^2 \sin^2 \vartheta r^2 \sin \vartheta dr = \frac{2\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \vartheta \cos^{10} \vartheta d\vartheta = \\&= \frac{\pi}{5} B(2, \frac{11}{2}) = \frac{\pi}{5} \frac{\Gamma(\frac{11}{2})}{\Gamma(\frac{15}{2})} = \frac{4\pi}{5 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{4\pi}{715}.\end{aligned}$$

3. naloga (25 točk)

Naj bo (M, d) metrični prostor, kjer je

$$M = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ zvezna}, f(0) = 1\}$$

in d metrika, dana z

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Dana naj bo preslikava $\phi : M \rightarrow M$ s predpisom

$$\phi(f)(x) = 1 + \int_0^x \left(\int_0^t (f(u) + e^u) du \right) dt.$$

a) Naj bo $f(x) = x^2$. Izračunaj $\phi(f)$.

b) Ali je preslikava ϕ skrčitev?

c) Izračunaj negibno točko preslikave ϕ .

(**Nasvet:** Pokaži, da funkcija, ki predstavlja negibno točko preslikave ϕ , zadošča diferencialni enačbi $y''(x) = y(x) + e^x$.)

Rešitev:

Velja

$$\phi(f)(x) = \frac{x^4}{12} + e^x - x.$$

Velja

$$d(\phi(f), \phi(g)) \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \int_0^x \left(\int_0^t du \right) dt \leq \frac{1}{2} d(f, g)$$

torej je ϕ skrčitev.

Negibna točka je takšna funkcija y , za katero je

$$y(x) = 1 + \int_0^x \left(\int_0^t (y(u) + e^u) du \right) dt.$$

Torej je $y(0) = 1$. Odvajamo, in dobimo

$$y'(x) = \int_0^x y(u) + e^u du,$$

torej je $y'(0) = 0$. Še odvajamo in dobimo

$$y''(x) = y(x) + e^x,$$

Rešitev diferencialne enačbe $(y''(x) = y(x) + e^x)$ je

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x.$$

Iz danih začetnih pogojev pa dobimo

$$C_1 = \frac{1}{4} \quad C_2 = \frac{3}{4},$$

tako da je končna rešitev

$$y = \frac{1}{4} e^x + \frac{3}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x.$$

4. naloga (25 točk)

Dana naj bo holomorfná funkcija

$$f(z) = \frac{-z - 2 + 2i}{(z - i)(z - 2)}.$$

- a) Določi definicijsko območje funkcije f .
b) Razvij funkcijo f v Laurentovo vrsto na kolobarju

$$\mathcal{K}_1 = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\}.$$

- c) Določi največji možen $R > 0$, za katerega ima funkcija f Laurentov razvoj na kolobarju

$$\mathcal{K}_2 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - i| < R\}.$$

Rešitev:

Definicijsko območje je

$$\mathbb{C} - \{i, 2\}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - i} + \frac{-2}{z - 2} = \frac{1}{z(1 - \frac{i}{z})} + \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{z} \left(1 + \left(\frac{i}{z}\right) + \left(\frac{i}{z}\right)^2 + \left(\frac{i}{z}\right)^3 + \left(\frac{i}{z}\right)^4 + \dots \right) + 1 + \left(\frac{z}{2}\right) + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \left(\frac{z}{2}\right)^4 + \dots = \\ &= \dots + \frac{i^2}{z^3} + \frac{i}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \dots \end{aligned}$$

Velja

$$R = \sqrt{5}$$

saj je toliko razdalja od $z = i$ do najbližje singularnosti $z = 2$.