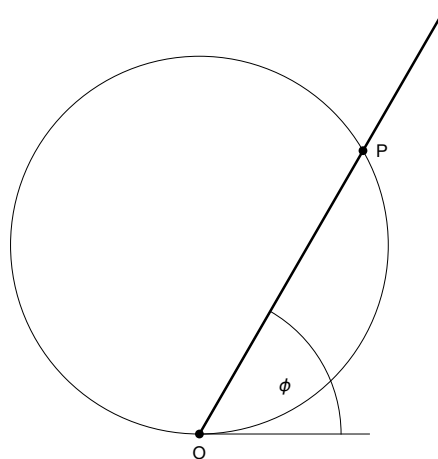


1. izpit iz Mehanike

2. februar 2022

1. Poltrak se enakomerno vrtil okrog točke O in seka krožnico s polmerom a v točki P , glej skico.

- (a) Postavi v O izhodišče polarnega koordinatnega sistema in izračunaj vektorja hitrosti in pospeška.
- (b) Izračunaj njuni velikosti.
- (c) V kolikšnem času se točka vrne v začetni položaj O ? Ugotovi ali morda P enakmerno kroži.



2. Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala

$$U = U_0(x^2 - a^2) + \alpha.$$

- (a) Za primer $U_0 > 0$ in $\alpha > 0$ skiciraj potencial in kvalitativno obravnavaj možna gibanja.
 - (b) Izračunaj harmonično aproksimacijo periode gibanja v okolici ravnovesne lege.
 - (c) Za energijo $E_0 = \alpha U_0$ izračunaj še libracijsko aproksimacijo periode.
3. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = r_0(1 + \sin 2\varphi)$.
- (a) Izračunaj pripadajočo silo.
 - (b) Skiciraj tir in izračunaj v kolikšnem času točka obkroži center sile.
 - (c) Določi efektivni potencial ter kvalitativno obravnavaj možna gibanja. Določi energijo pri kateri je možen krožni tir.
4. Vetrnica v obliki pravokotnika dimenzije $a \times 2a$ se vrtil okrog svoje diagonale.
- (a) Izračunaj vztrajnostni moment okrog diagonale pravokotnika.
 - (b) Na vetrnico deluje linearen upor zraka, vrtenje vetrnice pa poganja navor M_0 . Zapiši enačbe gibanja in določi navor M_0 , da se bo vetrnica enakomerno vrtela. Nasvet: upoštevaj zvezo med navorom upora zraka in vztrajnostnim momentom.

Rešitve

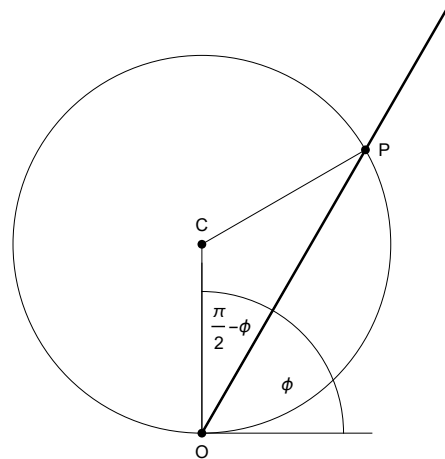
1. (a) V polarnem koordinatnem sistemu z izhodiščem v O je $r = \overline{OP} = 2a \sin \varphi$. Potem

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = 2a\omega(\cos \varphi \vec{e}_r + \sin \varphi \vec{e}_\varphi).$$

Tu smo z ω zapisali konstantno kotno hitrost $\dot{\varphi}$. Pospešek je

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ &= 4a\omega^2(-\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi).\end{aligned}$$

- (b) Velikosti hitrosti in pospeška sta $|\vec{v}| = 2a\omega$ in $|\vec{a}| = 4a\omega^2$.
(c) Točka se vrne v začetni položaj, ko je $\varphi = \pi$. Ker poltrak enakomerno kroži, se vrne v času $t = \pi/\omega$. Ker je $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ točka enakomerno kroži.



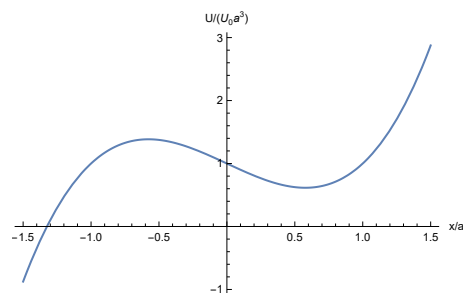
2. (a) Slika potenciala za primer $\alpha = a^3$ je na desni sliki. Vidimo, da ima potencial dva lokalna ekstrema. Dobimo jih z rešitvijo enačbe $U' = 0$. Izračunajmo

$$U' = U_0(3x^2 - a^2).$$

Ekstrema sta $x_1 = -a/\sqrt{3}$ in $x_2 = a/\sqrt{3}$. Drugi odvod je $U'' = 6U_0x_i$. Potemtakem je x_1 lokalni maksimum, x_2 pa lokalni minimum. Vrednosti lokalnih ekstremov sta

$$U_1 = U(x_1) = U_0\left(\alpha + \frac{2a^3}{2\sqrt{3}}\right) \quad \text{in} \quad U_2 = U(x_2) = U_0\left(\alpha - \frac{2a^3}{2\sqrt{3}}\right).$$

Za energijo $E_0 > U_1$ točka ubeži v levo v neskončnost, za $E_0 \in [U_2, U_1)$ pa je možno nihanje v okolici lokalnega minimuma. Na levi strani grafa točka ubeži v neskončnost pri poljubni energiji.



- (b) Harmonična aproksimacija periode gibanja je

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_2)}} = \pi\sqrt{\frac{2m}{\sqrt{3}aU_0}} = \pi\sqrt{\frac{m}{aU_0}}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

- (c) Libracijsko aproksimacijo dobimo po formuli

$$T = \pi\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\chi(u_1)}} + \frac{1}{\sqrt{\chi(u_2)}}\right),$$

kjer je

$$E_0 - U(x) = (u_2 - x)(x - u_1)\chi(x).$$

V našem primeru je $E_0 = \alpha U_0$. Potem

$$E_0 - U(x) = U_0(x(x^2 - a^2)) = U_0x(x - a)(x + a).$$

Ničli energijske nivojnice nad lokalnim minimumom sta $u_1 = 0$ in $u_2 = a$ tako, da je $\chi(x) = U_0(x + a)$. Libracijska aproksimacija je tako enaka

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{U_0 a}} + \frac{1}{\sqrt{2U_0 a}} \right) = \pi \sqrt{\frac{m}{aU_0}} \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}.$$

3. (a) Slika tira je na desni. Uporabimo Binetovo formulo $a_r = -C_0^2 u^2 (u + u'')$, kje je $u = 1/r$. Po krajšem računu dobimo

$$u' = -\frac{2 \cos 2\varphi}{(1 + \sin 2\varphi)^2}$$

in

$$u'' = \frac{4 \sin 2\varphi}{r_0 (1 + \sin 2\varphi)^2} + \frac{8 \cos^2 2\varphi}{r_0 (1 + \sin 2\varphi)^3}.$$

Uporabimo zvezo $\sin 2\varphi = \frac{r}{r_0} - 1$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{4(r/r_0 - 1)}{r_0 (r/r_0)^2} + \frac{8(1 - (r/r_0 - 1)^2)}{r_0 (r/r_0)^3} \\ &= 4 \frac{3r_0 - r}{r^2} \end{aligned}$$

in

$$a_r = -C_0^2 \left(\frac{12r_0}{r^4} - \frac{3}{r^3} \right).$$

Sila je potem enaka

$$F = ma_r = -mC_0^2 \left(\frac{12r_0}{r^4} - \frac{3}{r^3} \right).$$

- (b) Točka je zaporedoma v centru sil $r = 0$ pri $\varphi = -\pi/4$ in $\varphi = 3\pi/4$. Čas vrnitve v center sile je potem $T = 2A/C_0$, kjer je A površina

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} r_0^2 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (1 + \sin 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi r_0^2}{4}.$$

- (c) Potencial sile je

$$V = - \int F dr = mC_0^2 \left(-\frac{4r_0}{r^3} + \frac{3}{2r^2} \right),$$

efektivni pa je

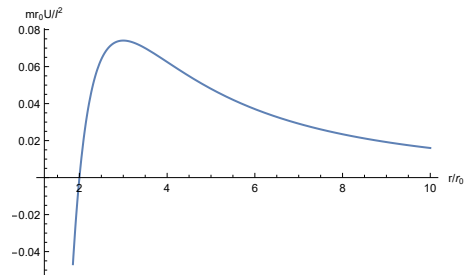
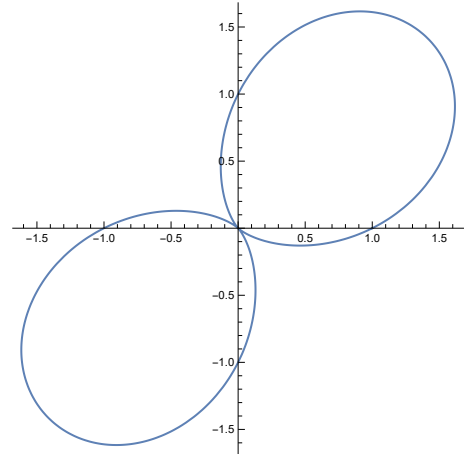
$$U = \frac{l^2}{2mr^2} + V = 2 \frac{l^2}{m} \left(-\frac{2r_0}{r^3} + \frac{1}{r^2} \right).$$

Krožni tir je možen pri pogoju $U' = 0$, to je pri

$$2 \frac{l^2}{m} \left(\frac{6r_0}{r^4} - \frac{2}{r^3} \right) = 0,$$

torej pri $r_1 = 3r_0$. Iskana energija je tako enaka

$$E_0 = U(r_1) = \frac{2l^2}{27mr_0^2}.$$



Točka pade v center sile pri energiji $E < E_0$, če je levo od krožnega tira in ubeži v neskončnost če je desno in je $0 < E < E_0$. Za $E > E_0$ točka pade v center sile ali ubeži v neskončnost, odvisno od njene smeri gibanja. Pri $E = E_0$ se pri gibanju proti r_1 tir spiralno navija na krožni tir.

4. (a) Postavimo os x v smer krajše stranice, os y pa v smer daljše stranice pravokotnika. Diagonala pravokotnika ima potem smer $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$. Iskani moment je potem $J = \vec{e} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \vec{e}$. Vidimo, da moramo izračunati vztrajnostna momenta okrog osi x in y . Velja

$$J_x = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a}^a dy y^2 = \frac{2\rho a^4}{3} = \frac{a^2 m}{3}$$

in

$$J_y = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a}^a dy x^2 = \frac{\rho a^4}{6} = \frac{a^2 m}{12}.$$

Tako dobimo

$$J = \vec{e} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \vec{e} = \frac{2ma^2}{15}.$$

- (b) Enačba vrtenja vetrnice je

$$J\ddot{\varphi}\vec{e} = \vec{N} + N_0\vec{e}. \quad (1)$$

Tu je $\vec{e}$ enotski vektor v smeri osi rotacije, $\vec{N}$ je navor upora zraka, N_0 pa je navor motorja. Izračunati moramo navor upora. Telesni koordinatni sistem z bazo $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ izberemo tako, da je os $\vec{e}_2$ v smeri osi rotacije $\vec{e}$. Potem je

$$\vec{N} = \int_A d\vec{N} = \int_A \vec{\zeta} \times \vec{f} dA = - \int_A \vec{\zeta} \times \mu \vec{v} dA = -\mu \int_A \vec{\zeta} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) dA.$$

Tu je A kvadrat, μ koeficient v linearnem zakonu upora zraka, $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}$ pa vektor kotne hitrosti. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \vec{N} &= -\mu \int_A \vec{\zeta} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) dA \\ &= -\mu \dot{\varphi} \int_A \vec{\zeta} \times (\vec{e} \times \vec{\zeta}) dA \\ &= -\mu \dot{\varphi} \int_A \left(|\vec{\zeta}|^2 - (\zeta \cdot \vec{e})\zeta \right) dA \\ &= -\mu \int_A \left(|\vec{\zeta}|^2 \underline{\underline{I}} - \vec{\zeta} \otimes \vec{\zeta} \right) dA \dot{\varphi} \vec{e} \\ &= -\mu \underline{\underline{J}} \dot{\varphi} \vec{e} \\ &= -\mu J \dot{\varphi} \vec{e}. \end{aligned}$$

Iz enačbe (1) potem sledi

$$J\ddot{\varphi} = -\mu J \dot{\varphi} + N_0,$$

oziroma

$$J\dot{\omega} = -\mu J \omega + N_0.$$

Vetrnica se enakomerno vrti, če je $\dot{\omega} = 0$. Iskani navor motorja je potem

$$N_0 = \mu J \omega_0 = \frac{2\mu m a^2 \omega_0}{15},$$

kjer je ω_0 kotna hitrost enakomerne rotacije.