

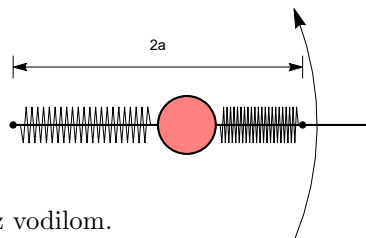
3. izpit iz Mehanike

7. junij 2022

- Podano je gibanje $\vec{r} = r_0(\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta)$, kjer sta $\vec{e}_r$ in $\vec{e}_\theta$ bazna vektorja polarnega koordinatnega sistema, $r_0 > 0$ in $\theta = \theta(t)$.
 - Skiciraj tir.
 - Izračunaj vektor hitrosti in vrtilno količino gibanja.
 - Kolikšno delo opravi točka pri gibanju od položaja $\theta = 0$ do položaja $\theta = \theta_0$?
 - Za $\theta = \omega_0 t$, $\omega_0 > 0$ določi kdaj točka zavira.

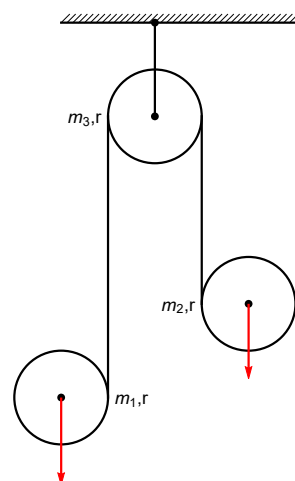
- Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po tiru $r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos a\varphi}$, $r_0 > 0$, $a \in \mathbb{R}$.
 - Izračunaj pripadajočo silo.
 - Določi efektivni potencial ter kvalitativno obravnavaj možna gibanja. Kaj velja za $a = 1$?
 - Točka od položaja $\varphi = 0$ do $\varphi = \frac{\pi}{4a}$ pride v času t_0 . Določi plosčinsko hitrost.

- Ravno vodilo enakomerno kroži s kotno hitrostjo ω okrog navpične osi. Po vodilu pa je brez trenja gibljiva kroglica s polmerom r_0 in maso m , ki je pripeta z dvema vzmetema tako kot kaže skica. Dolžini neraztegnjenih vzmeti sta a , prožnostni modul pa k .



- Določi silo vzmeti na kroglico.
- Zapiši Newtonovo enačbo v RKS, ki se vrti hkrati z vodilom.
- Določi ravnovesni položaj točke na vodilu. Kdaj je stabilen?
- Določi frekvenco nihanja okoli stabilne lege.

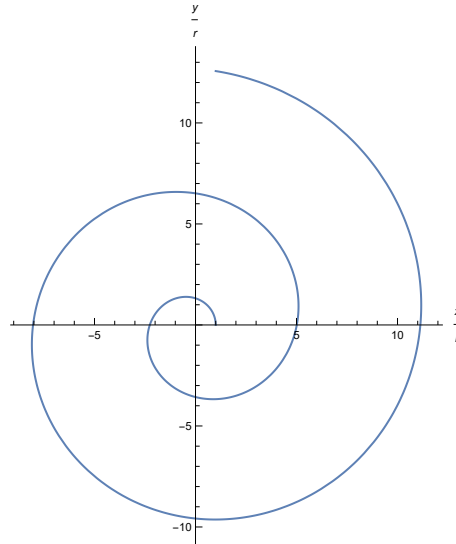
- Preko valja s polmerom r in maso m_3 sta obešena jojoja z masama m_1 in m_2 in polmerom valja r tako kot kaže skica.



- Zapiši enačbe gibanja.
- Določi kinematično vez pri pogoju, da vrhica ne zdrsne na valju m_3 .
- Določi gibanje levega jojoja.

Rešitve

1. (a) Skica tira je na sliki



- (b) Vektor hitrosti je

$$\vec{v} = r_0(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\vec{e}_\theta - \theta\dot{\theta}\vec{e}_r) = r_0\dot{\theta}(2\vec{e}_\theta - \theta\vec{e}_r),$$

vrtilna količina pa

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr_0^2\dot{\theta}(2 + \theta^2)\vec{k}.$$

Tu smo upoštevali, da je $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{k}$.

- (c) Delo je enako spremembi kinetične energije. Izračunajmo prvo

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = r_0^2\dot{\theta}^2(4 + \theta^2).$$

Potem je delo enako

$$A = \frac{1}{2}mr_0^2 \left(\dot{\theta}_2^2(4 + \theta_0^2) - 4\dot{\theta}_1^2 \right),$$

kjer je $\dot{\theta}_2$ kotna hitrost pri $\theta = \theta_0$ in $\dot{\theta}_1$ pri $\theta = 0$. Pri predpostavki $\theta = \omega_0 t$ je

$$A = \frac{1}{2}mr_0^2\omega_0^2\theta_0^2.$$

- (d) Točka zavira, če je $\vec{v} \cdot \vec{a} \leq 0$. Pospešek je

$$\vec{a} = r_0\omega_0^2(-3\vec{e}_r - \theta\vec{e}_\theta).$$

Potem je

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = r_0^2\omega_0^4 t.$$

Točka zavira za $t < 0$.

2. (a) Silo dobimo s pomočjo Binetove formule. Za $u = 1/r = \frac{1}{r_0} \cos a\theta$ izračunamo

$$u' = -\frac{a}{r_0} \sin a\theta \quad \text{in} \quad u'' = -\frac{a^2}{r_0} \cos a\theta = -a^2 \frac{1}{r}.$$

Potem je

$$a_r = -C_0^2 u^2 (u + u'') = -\frac{1}{r^3} (1 - a^2) C_0^2.$$

Iskana sila je

$$\vec{F} = -m \frac{1}{r^3} (1 - a^2) C_0^2 \vec{e}_r.$$

- (b) Potencial sile je

$$V = -\frac{1}{2} m C_0^2 (1 - a^2) \frac{1}{r^2}$$

pripadajoči efektivni potencial pa

$$U = \frac{l^2}{2mr^2} + V = \frac{l^2 a^2}{2mr^2}.$$

Pri $a = 1$ je sila enaka nič. V tem primeru se točka giblje premočrtno. Gibanje je možno za $E_0 > 0$. Vsa možna gibanja so neomejena. Iz enačbe tira vidimo, da točka ubeži v neskončnost pri $\theta = \pm \frac{\pi}{2a}$.

- (c) Velja zveza $A = \frac{1}{2} C_0 t_0$, kjer je

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4a} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r_0^2 \int_0^{\pi/4a} \frac{1}{\cos^2 a\theta} d\theta = \frac{r_0^2}{2a}.$$

Tako dobimo

$$C_0 = \frac{r_0^2}{a t_0}.$$

3. (a) Označimo z $\vec{e}_1$ bazni vektor relativnega koordinatnega sistema v smeri vodila. Potem je $\vec{\zeta} = \zeta \vec{e}_1$. Vektor kotne hitrosti je $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$, na točko pa deluje sila vezi $\vec{S} = S \vec{e}_2$ in sili vzmeti $\vec{F}$. Sili vzmeti sta

$$\vec{F}_1 = -k((\zeta - r_0) - a) \vec{e}_1, \quad \vec{F}_2 = k((2a - \zeta - r_0) - a) \vec{e}_1.$$

Potem je $\vec{F} = -2k(\zeta - a) \vec{e}_1$.

- (b) Newtonova enačba v RKS je

$$m \vec{a}_{rel} = \vec{F} + \vec{S} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \vec{F} + \vec{S} + m \omega^2 \vec{\zeta} \vec{e}_1 - 2m \omega \dot{\zeta} \vec{e}_2$$

oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} m \ddot{\zeta} &= -2k(\zeta - a) + m \omega^2 \zeta, \\ 0 &= S - 2m \omega \dot{\zeta}. \end{aligned}$$

- (c) V ravnovesni legi je $\ddot{\zeta} = 0$. Potem $0 = -2k(\zeta - a) + m \omega^2 \zeta$. Rešitev enačbe je

$$\zeta_0 = \frac{2ka}{2k - m \omega^2}.$$

Pogoj, da obstaja ravnovesna lega na vodilu je $0 \leq \zeta_0 \leq 2a$. Potem mora veljati $k > m \omega^2$. Ravnovesna lega je očitno stabilna. Gibanje v smeri osi ζ ima potencial

$$U = \frac{1}{2} (m \omega^2 - 2k) \zeta^2 + 2ka\zeta,$$

ki ima v ζ_0 stabilno ravnovesno lego.

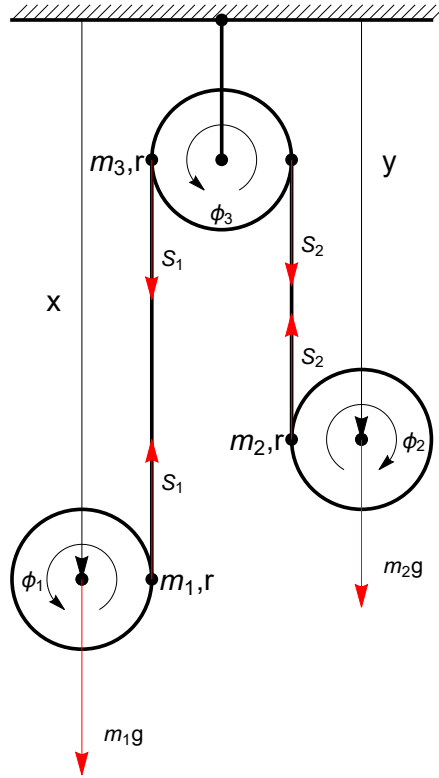
(d) Enačba gibanja prepišimo v

$$m\ddot{\zeta} = (m\omega^2 - 2k)\zeta + 2ka.$$

Frekvenca nihanja je

$$\omega = \sqrt{2k - m\omega^2}.$$

4. (a) Z oznakami na spodnji sliki so gibalne enačbe:



$$m_1\ddot{x} = m_1g - S_1, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1r^2\ddot{\phi}_1 = rS_1, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}m_3r^2\ddot{\phi}_3 = r(S_1 - S_2), \quad (3)$$

$$m_2\ddot{y} = m_2g - S_2, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}m_2r^2\ddot{\phi}_2 = rS_2. \quad (5)$$

(b) Kinematični enačbi sta

$$\dot{x} = r(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_3), \quad (6)$$

$$\dot{y} = r(\dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3). \quad (7)$$

(c) Vstavimo (6) v (1) in s pomočjo (2) eliminiramo $\ddot{\phi}_1$. Tako dobimo

$$m_1r\ddot{\phi}_3 = m_1g - 3S_1.$$

Podobno s kombinacijo (2), (5) in (7) dobimo

$$-m_2 r \ddot{\varphi}_3 = m_2 g - 2S_2.$$

Pridružimo dobljenima enačbama (3). Iz sistema teh treh enačb za $\ddot{\varphi}_3$, S_1 in S_2 izračunamo

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{(m_1 - m_2)g}{r(m_1 + m_2 + \frac{3}{2}m_3)}$$

in od tod

$$S_1 = \frac{1}{3}m_1 g \frac{2m_2 + \frac{3}{2}m_3}{m_1 + m_2 + \frac{3}{2}m_3}.$$

Iz (1) potem sledi

$$\ddot{x} = g \frac{3m_1 + m_2 + 3m_3}{3(m_1 + m_2 + \frac{3}{2}m_3)}.$$