

Naloge pri predmetu Seminar
UL FMF, Finančna matematika, 1. stopnja
2021/22

(1) (Raič 7. 3., Bernik 17. 3.)

V posodi je spočetka 6 belih kroglic. Ponavljamo naslednji postopek:

- Iz posode na slepo izvlečemo kroglico.
- Če izvlečena kroglica ni bela, končamo.
- Če je izvlečena kroglica bela, jo vrnemo v posodo, nakar dodamo toliko belih kroglic, kolikor jih je ta hip v posodi, še dvakrat toliko belih kroglic, kolikor je ta hip v posodi rdečih kroglic, in še eno rdečo kroglico.

Kolikšna je verjetnost, da se postopek nekoč konča? Kaj pa pogojno na dogodek, da smo že n -krat izvlekli belo kroglico?

(2) (Raič 7. 3., Bernik 17. 3.)

V posodi je spočetka ena bela kroglica. Ponavljamo naslednji postopek:

- Iz posode na slepo izvlečemo kroglico.
 - Če izvlečena kroglica ni bela, končamo.
 - Če je izvlečena kroglica bela, jo vrnemo v posodo, nakar dodamo toliko rdečih kroglic, da je število belih in rdečih izenačeno, končno pa še toliko belih kroglic, kolikor je bilo v posodi pred vlečenjem rdečih kroglic.
- a) Dokaži, da skoraj gotovo nekoč nehamo vleči.
- b) Ali obstaja pričakovano število vlečenj? Kaj pa pričakovano število kroglic v posodi pred zadnjim vlečenjem? Če iskana pričakovana vrednost obstaja, jo numerično izračunaj na tri decimalke natančno.

(3) (Raič 7. 3., Bernik 17. 3.)

Igralca A in B igrata tekmo, sestavljeno iz zaporednih iger, v katerih zmaga A z verjetnostjo p in B z verjetnostjo $1 - p$.

- a) Tekmo dobi igralec, ki prvi zmaga v dveh igrah zapored. Kolikšna je verjetnost, da tekmo dobi A ? Svoj rezultat smiselno preizkusi.
- b) Vse skupaj naredi še za primer, ko tekmo dobi igralec, ki prvi zmaga v treh igrah zapored.

(4) (Raič 21. 3., Bernik 24. 3.)

Igralca A in B igrata tekmo, sestavljeno iz zaporednih iger, v katerih zmaga A z verjetnostjo p in B z verjetnostjo $1 - p$. Naj bo T število iger, ki jih odigrata do takrat, ko prvič zmaga A dvakrat zapored.

- a) Izračunaj $\mathbb{E}(T)$.
- b) Kako bi izračunal porazdelitev slučajne spremenljivke T ?

(5) (Raič 21. 3., Bernik 24. 3.)

Igralca A in B igrata tekmo, sestavljeno iz zaporednih iger, v katerih zmaga A z verjetnostjo p in B z verjetnostjo $1 - p$. Naj bo T število iger, ki jih odigrata do takrat, ko se prvič zgodi, da zmaga A , B pa je pred tem že zmagal.

- a) Izračunaj $\mathbb{E}(T)$.
- b) Kako bi izračunal porazdelitev slučajne spremenljivke T ?

(6) (Raič 21. 3., Bernik 24. 3.)

Imamo n košev. Kolikšno je pričakovano število žog, ki jih moramo vreči, da bodo vsi koši polni? Kaj pa varianca?

(7) **(Raič 28. 3., Bernik 31. 3.)**

Vlado mora desetkrat zapored vreči pošten kovanec, meti so neodvisni. Vsakič, ko pade cifra in je bila tudi že v prejšnjem metu cifra, mora Albertu plačati en evro. Vsakič, ko kovanec pade drugače kot v prejšnjem metu, pa mora en evro plačati Bojanu. Zneska, ki ju na koncu dobita Albert in Bojan, sta slučajni spremenljivki. Izračunaj njuni pričakovani vrednosti in še korelacijski koeficient med njima.

(8) **(Raič 28. 3., Bernik 31. 3.)**

Mečemo pošten kovanec, meti so neodvisni. Izberimo $m \in \mathbb{N}$. Naj bo X število metov, ki so potrebni, da dobimo ali m grbov ali m cifer.

- a) Določi porazdelitev te slučajne spremenljivke.
- b) Izračunaj $\mathbb{E}(X)$.

Namig: pomagaj si z vsoto verjetnosti.

(9) **(Raič 28. 3., Bernik 31. 3.)**

Vlado in Miha mečeta (skupno) kocko. Vlado postane srečen, ko prvič pade liho število pik, Miha pa, ko prvič pade šestica. Kaj lahko poveš o številu metov X , ki so potrebni, da bo srečen vsaj eden, in številu metov Y , ki so potrebni, da bosta srečna oba?

(10) **(Raič 4. 4., Bernik 7. 4.)**

Vlado in Miha mečeta vsak svojo kocko. Naj bo X število metov, ki so potrebni, da eden od njiju vrže šestico, Y pa število metov, ki so potrebni, da šestico vržeta obadva (ne nujno v istem metu). Kaj lahko poveš o porazdelitvah slučajnih spremenljivk X , $Y - X$ in Y ?

(11) **(Raič 4. 4., Bernik 7. 4.)**

Mečemo dve kocki, dokler prvič ne pokažeta isto število pik. Naj bo X število metov in Y število pojavitev zadnjega števila pik v vseh metih.

- a) Izračunaj pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y glede na X .
- b) Izračunaj brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X .
- c) Koliko pa je $\text{Cov}(X, Y)$?

(12) **(Raič 4. 4., Bernik 7. 4.)**

Za diskretno slučajno spremenljivko X rečemo, da je porazdeljena *logaritemsko* s parametrom q , $0 < q < 1$, če je

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{cq^n}{n} ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

za neko konstanto c .

- a) Določi c ter izračunaj $\mathbb{E}(X)$ in $\text{Var}(X)$.
- b) Naj bo $(X_i)_{i \geq 1}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih tako kot X , in N slučajna spremenljivka, porazdeljena Poissonovo s parametrom λ , neodvisna od zaporedja $(X_i)_{i \geq 1}$. Definirajmo

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Izračunaj rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Y . Kako je porazdeljena ta slučajna spremenljivka?

(13) **(Raič 11. 4., Bernik 14. 4.)**

Iz žare, v kateri je a belih, b rdečih in c črnih kroglic, žrebamo z vračanjem, dokler ne izvlečemo črne. Naj bo X število belih kroglic, ki smo jih izvlekli, in Y število žrebanj.

- a) Izračunaj pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na Y .
- b) Izračunaj brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X .

c) Koliko pa je $\text{Cov}(X, Y)$?

(14) **(Raič 11. 4., Bernik 14. 4.)**

Iz žare, v kateri je a belih, b rdečih in c črnih kroglic, žrebamo z vračanjem, dokler prvič ne izvlečemo črne po tem, ko smo že izvlekli kroglici obeh drugih barv. Naj bo X število črnih kroglic, ki smo jih izvlekli, in Y število žrebanj.

a) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y ?

b) Koliko je $\text{Cov}(X, Y)$?

(15) **(Raič 11. 4., Bernik 14. 4.)**

Iz žare, ki vsebuje dve beli in $b > 0$ črnih krogel, žrebamo brez vračanja. Naj bo X število žrebanj, potrebnih, da prvič izvlečemo belo, in Y število žrebanj, potrebnih, da prvič izvlečemo črno kroglo. Izračunaj $\text{Cov}(X, Y)$.

(16) **(Bernik 21. 4., Raič 25. 4.)**

Imamo po m izvodov vsake izmed n različnih črk, ki jih označimo z $1, 2, \dots, n$. Na začetku so črke urejene po vrsti, torej $1111 \dots 1222 \dots 2333 \dots nnn$. Nato pa vseh mn črk naključno permutiramo, tako da je vseh $(mn)!$ vrstnih redov enako verjetnih. Za položaj $i = 1, 2, \dots, mn$ pravimo, da je *posplošena negibna točka*, če je po permutaciji na njem še vedno ista črka kot pred njo. Izračunaj pričakovano vrednost in varianco števila posplošenih negibnih točk.

(17) **(Bernik 21. 4., Raič 25. 4.)**

Žarnice so bodisi tipa S , če je njihova življenjska doba porazdeljena $\text{Exp}(2\lambda)$, ali tipa N , če je njihova življenjska doba porazdeljena kot $\min\{\text{Exp}(\lambda), d\}$.

a) Določi d tako, da bosta pričakovani življenjski dobi obeh tipov enaki.

b) Denimo, da slučajno izberemo žarnico, pri čemer sta oba tipa enako verjetna. Kolikšna je verjetnost, da bo gorela dlje, kot je njena pričakovana življenjska doba? Če je tako izbrana žarnica gorela dlje, kot je njena pričakovana življenjska doba, kolikšna je verjetnost, da je bila izbrana žarnica tipa S ?

(18) **(Bernik 21. 4., Raič 25. 4.)**

Žarnica A ima življenjsko dobo porazdeljeno $\text{Exp}(\lambda)$, žarnica B pa kot $\min\{\text{Exp}(\mu), d\}$.

a) Denimo, da ju prižgemo istočasno. Kolikšno je matematično upanje časa, ko bo v prostoru svetlo, in časa, ko obe svetita hkrati?

b) Denimo, da ju prižgemo zaporedoma. Poišči porazdelitev časa, ko je v prostoru svetlo.

(19) **(Bernik 5. 5., Raič 9. 5.)**

Žarnica A ima življenjsko dobo porazdeljeno $\text{Exp}(\lambda)$, žarnica B pa kot $\min\{\text{Exp}(\mu), d\}$. Denimo, da ju prižgemo zaporedoma. Poišči pogojno porazdelitev časa, ko gori A , pogojno na čas, ko je v prostoru svetlo.

(20) **(Bernik 5. 5., Raič 9. 5.)**

Streljamo v tarčo kvadratne oblike z robom a . Predpostavimo, da vsak zadetek zadene tarčo in da je točka zadetka porazdeljena enakomerno po tarči. Izračunaj verjetnost, da bo naš strel zadel bližje središču tarče kot njenemu robu.

(21) **(Bernik 5. 5., Raič 9. 5.)**

Naj bo slučajni vektor (X, Y) porazdeljen enakomerno po trikotniku z oglišči $(0, 0)$, $(0, 1)$ in $(1, 0)$. Naj bo R dolžina tega slučajnega vektorja.

a) Izračunaj $\text{Cov}(X, Y)$.

b) Izračunaj $\mathbb{E}(R | X)$ in $\mathbb{E}(R)$.

(22) **(Bernik 12. 5., Raič 16. 5.)**

Naj bo $(X_i)_{i \geq 1}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih zvezno s porazdelitveno funkcijo F . Naj bo $A_k = \{\max\{X_1, \dots, X_k\} = X_k\}$ dogodek, da je k -ta vrednost *rekord*, in $Z_k = \mathbf{1}_{A_k}$ njegova indikatorska funkcija.

- a) Kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke Z_k ?
- b) Za $n \geq 1$ in $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq n$, $i \leq n$, pokaži, da velja

$$\mathbb{P}(Z_{j_1} = 1, Z_{j_2} = 1, \dots, Z_{j_i} = 1) = \frac{1}{j_1 j_2 \dots j_i}.$$

S pomočjo tega pokaži, da so slučajne spremenljivke Z_k , $k \geq 1$, neodvisne.

- c) Naj bo $N_1 = \sum_{k \geq 1} Z_k$ število vseh rekordov in $N_2 = \sum_{k \geq 1} Z_k Z_{k+1}$ število vseh zaporednih rekordov. Pokaži, da je $N_1 = \infty$ s. g., in izračunaj $\mathbb{E}(N_2)$.

(23) **(Bernik 12. 5., Raič 16. 5.)**

Naj bo $(X_i)_{i \geq 1}$ zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih zvezno s porazdelitveno funkcijo F . Naj bo $A_k = \{\max\{X_1, \dots, X_k\} = X_k\}$ dogodek, da je k -ta vrednost *rekord*, in $Z_k = \mathbf{1}_{A_k}$ njegova indikatorska funkcija. Naj bo $T_1 = 1$ in $T_{n+1} = \inf\{k > T_n \mid Z_k = 1\}$, $n \geq 1$. Tako je T_n čas n -tega rekorda.

- a) Kakšna je pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke T_2 glede na X_1 ?
- b) Kakšna je brezpogojna porazdelitev slučajne spremenljivke T_2 ?
- c) Koliko je $\mathbb{E}(T_2)$?