

Optimizacijska naloga: trojica (D, f, opt) , kjer je

- D množica dopustnih rešitev,
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ciljna funkcija,
- $\text{opt} \in \{\min, \max, \inf, \sup\}$ vrsta ekstrema.

1. Zapiši problem kot optimizacijsko nalogo (D, f, opt) .

(a) **(ekstrem)** Iščemo minimum funkcije $f(x) = -x^2 + 2x + 5$.

Rešitev: preverimo, ali je polinom omejen navzdol; če je, poiščemo ničle odvoda, preverimo, ali ustrezajo lokalnemu minimumu (drugi odvod); če najdemo lokalni minimum, poiščemo najmanjšega.

(b) **(vezani ekstrem)** Iščemo valj z največjim volumnom pri dani površini P .

Rešitev: izrazimo v kot funkcijo r , poiščemo maksimum dobljene ciljne funkcije v r .

Naša rešitev: $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, $v = 2r$.

(c) **(preprosti nahrbtnik)** Imamo nahrbtnik s prostornino V ter n predmetov s prostorninami $V_1, \dots, V_n$ in cenami $c_1, \dots, c_n$. Katere predmete in s kakšnim deležem (predmete lahko režemo) naj vzamemo, da bo skupna cena čim večja?

Rešitev: predmete razvrstimo po vrednosti c_i/V_i , nato pa vzamemo najvrednejše predmete v celoti, kolikor stojijo v nahrbtniku, in tolikšen delež naslednjega najvrednejšega predmeta, kolikor stoji v nahrbtniku.

(d) **(0–1 nahrbtnik)** Imamo nahrbtnik s prostornino V ter n predmetov s prostorninami $V_1, \dots, V_n$ in cenami $c_1, \dots, c_n$. Katere predmete naj vzamemo, da bo skupna cena čim večja? Predmetov ne smemo rezati!

To je težak problem – ne poznamo učinkovitega postopka za reševanje (pregledati moramo vse možnosti).

Primer: $V = 4$, $V_1 = 3$, $V_2 = V_3 = 2$, $c_1 = 7$, $c_2 = c_3 = 4$. Zgornji postopek (brez zadnjega koraka) ne da optimalne rešitve!

(e) **(problem particije)** Imamo $2n$ jabolok s težami $t_1, \dots, t_{2n}$. Kako jih razdelimo v dve košari s po n jabolki, da bo v obeh košarah čim bolj podobna teža?

Težak problem!

(f) Imamo množico točk $A = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Iščemo najmanjšo kroglo, ki vsebuje vse točke v A .

(g) Imamo n centov. Kako jih lahko razdelimo na kovance po 1, 2, 5, 10, 20, 50, da bodo kovanci čim bolj enakomerno zastopani? (Kaj to pomeni?)

Rešitev: tabeliramo rešitve za $0 \leq n \leq 87$ (ker $1 + 2 + 5 + 10 + 20 + 50 = 88$ – lahko prevedemo problem na manjšega).

(h) **(maksimalni prerez)** Imamo neusmerjen enostaven graf $G = (V, E)$. Iščemo razdelitev $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, da bo število povezav med A in B čim večje.

Težak problem!

(i) **(problem trgovskega potnika)** Dano imamo množico mest in razdalj med njimi. Iščemo najkrajši cikel, ki bo obiskal vsako mesto natanko enkrat!

Težak problem!

- (j) **(minimalno vpeto drevo)** Imamo graf $G = (V, E)$, pri čemer ima vsaka povezava svojo ceno. Iščemo vpeto drevo z najmanjšo ceno.

Rešitev: Kruskalov, Primov algoritem.

Za realno matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ter realna vektorja $b \in \mathbb{R}^m$ in $c \in \mathbb{R}^n$ je linearni program (v standardni obliki) optimizacijska naloga $(\{x \in [0, \infty)^n \mid Ax \leq b\}, f, \max)$, kjer je $f : x \mapsto c^\top x$ linearna funkcija.

Pretvorba v standardno obliko:

$$\min c^\top x \quad \Rightarrow \quad \max -c^\top x$$

$$a^\top x \geq b \quad \Rightarrow \quad -a^\top x \leq -b$$

$$a^\top x = b \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a^\top x &\leq b \\ a^\top x &\geq b \end{aligned}$$

$$x_i \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (-x_i) \geq 0 \quad (\text{nadomestimo } x_i \text{ z } -x_i)$$

$$x_i \text{ ni omejen} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_i &= x_i^+ - x_i^- \\ x_i^+, x_i^- &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{nadomestimo } x_i \text{ z } x_i^+ - x_i^-)$$

2. V standardni obliki zapiši linearni program

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x + y \\ & 3x + 2y - z \geq 10 \\ & x + z \leq 30 \\ & y + z = 10 \\ & x \geq 0 \\ & y \leq 0 \end{aligned}$$