

Preštevanje božičnih dreves

Margerita Mehle in Nina Štrovs
Fakulteta za matematiko in fiziko

19. april 2022

V dokumentu bomo obnovili znanje o grafih teh spoznali metematična božična drevesa.

1 Nekaj definicij v teoriji grafov

Poglejmo si najprej kaj je graf in nekaj splošnih definicij, ki jih bomo uporabljali v nadaljevnaju.

Definicija 1.1. *Graf* je množica vozlišč in povezav, kjer z $V(G)$ označimo množico vozlišč grafa G , z $E(G)$ pa množico povezav. Povezave označujemo z zavitiimi oklepaji.

Primer: povezavo med vozliščem 1 in 2 zapišemo kot $\{1, 2\}$.

Definicija 1.2. Če med dvema vozliščema obstaja povezava, sta ti dve vozlišči *sosednji*.

Definicija 1.3. *Stopnja vozlišča* u na grafu G označimo z $\deg_G(u)$, pove pa nam število sosednjih vozlišč vozlišča u .

Definicija 1.4. Graf je *povezan*, če lahko najdemo tako zaporedje povezav med poljubnima vozliščema grafa, da se lahko sprehodimo od enega vozlišča do drugega.

V nadaljevanju se bomo ukvarjali s povezanimi grafi.

Definicija 1.5. *Razdalja* $d(u, v)$ je dolžina najkrajše poti med vozliščema u in v .

Isti graf lahko narišemo na več načinov. Zato rečemo, da sta dva grafa ekvivalentna, če imata enako strukturo. Bolj specifično bi to zapisali z naslednjo definicijo:

Definicija 1.6. Grafa G in H sta *ekvivalentna*, če obstaja taka bijekcija med $V(G)$ in $V(H)$, da sta vozlišči $u, v \in V(G)$ sosednji natanko takrat, ko sta sosednji vozlišči $f(u), f(v) \in V(H)$.

Sedaj si pogledjmo še nekaj vrst grafov.

Definicija 1.7. Graf $C_n, n \geq 3$ imenujemo *cikel*, če je $V(C_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ množica vozlišč, $E(C_n) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ pa množica povezav.

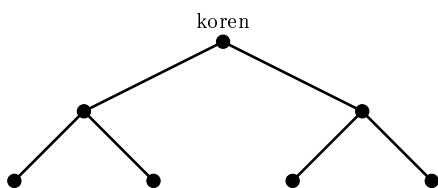
Definicija 1.8. Graf $P_n, n \geq 1$ imenujemo *pot z n vozlišči*, če je $V(P_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ množica vozlišč, $E(P_n) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$ pa množica povezav.

Definicija 1.9. Graf G je *drevo*, če med poljubnima dvema vozliščema obstaja natanko ena pot.

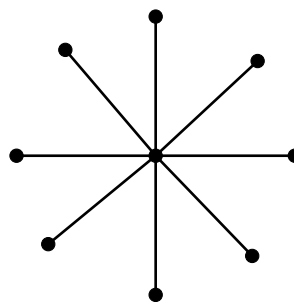
Definicija 1.10. Vozlišče na drevesu s stopnjo 1 imenujemo *list*.

Definicija 1.11. Naj bo dano drevo, kjer eno izmed vozlišč označimo za koren. Otroci nekega vozlišča so vsa sosednja vozlišča, ki težijo stran od korena. Če ima vsako vozlišče v tem drevesu največ dva otroka, imenujemo taka drevesa *binarna drevesa*.

Definicija 1.12. *Zvezda* je drevo, kjer je le eno vozlišče stopnje več od 1.



Slika 1: Binarno drevo.



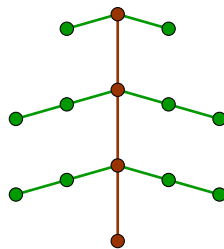
Slika 2: Zvezda.

2 Božična drevesa

Sedaj bomo spoznali posebno vrsto dreves v matematičnem smislu in to so *božična drevesa*.

Definicija 2.1. Drevo imenujemo božično drevo višine $h \geq 2$ z vejami dolžine $\{l_1, l_2, \dots, l_h\}$, kjer je $1 \leq l_j \leq l_{j+1} < h$ za vsak $j \in \{1, 2, \dots, h-1\}$, če zadošča naslednjima pogojema:

- (i) Obstaja pot dolžine $h+1$, ki tvori deblo. Vozlišče na enem koncu debla ima stopnjo 3, vozlišče na drugem koncu stopnjo 1. Vozlišče stopnje 3 je prvo vozlišče debla. Ostala vozlišča v deblu nato po vrsti označimo s števili $2, 3, \dots, h+1$.
- (ii) Za vsak $i \in \{1, 2, \dots, h\}$ obstajata dve poti, imenovani veji. Veja ima l_i vozlišč, ki se začnejo pri i -tem vozliču debla in se končajo pri listu. Vozlišče debla ni všteto zraven med l_i vozlišč.



Slika 3: Božično drevo višine 3.

Predlagamo, da si ogledate video za lažje razumevanje definicije. Lahko pa nadaljujete z branjem in video pustite za konec.

Naloga 1. Razmisli, ali obstaja božično drevo višine $h \geq 2$, ki ima same različne dolžine vej.

2.1 Število različnih dreves

Božična drevesa bomo preštevali na dva različna načina, zato označimo:

$N(h)$ = število različnih božičnih dreves višine h ,

$M(n)$ = število različnih božičnih dreves z n vozlišči.

Preštevovanje božičnih dreves pri fiksni višini h je dokaj enostavno in gre s pomočjo naslednje formule:

$$N(h) = \sum_{k=1}^{h-1} \binom{h-1}{k} \binom{h-1}{k-1}.$$

Dokaz. Naredili bomo kombinatorični dokaz. Opazimo, da je število različnih božičnih dreves višine h enako številu različnih načinov, s katerimi lahko izberemo dolžine vej $l_1, l_2, \dots, l_h$, ki zadoščajo pogoju $1 \leq l_j \leq l_{j+1} < h$. Za dolžino veje imamo $h - 1$ možnosti, torej imamo največ $h - 1$ različnih dožin vej. Izberemo k dolžin izmed $h - 1$. Ko izberemo k dolžin, moramo izbrati še, na katerih mestih se bojo členi zaporedja $l_1, l_2, \dots, l_h$ povečali. Povečali se bojo na $k - 1$ mestih izmed $h - 1$ možnih. Sedaj seštejemo po k , kjer gre k od vključno 1 do vključno $h - 1$ in dobimo zgornji izraz. $\square$

Naloga 2. Koliko je različnih dreves višine 5?

Veliko bolj zapleteno je preštevanje božičnih dreves, če poznamo število vozlišč n , iz katerih je drevo sestavljeno. Pri določenem številu vozlišč božičnih dreves sploh ni, kar se pri računanju števila dreves pri fiksni višini h nikoli ne zgodi.

Za razmislek poskusite rešiti nalogo 3, na predavanjih bomo skupaj pogledali še nekaj podobnih primerov. Ker za računanje $M(n)$ ni konkretne formule, bomo na uri razložili le osnovno idejo.

Naloga 3. Koliko je različnih dreves z natanko 11 vozlišči?

Literatura

- [1] T. N. Kolba in J. Beagley, *Counting Christmas Trees*, The College Mathematics Journal **52:5** (2021), 338-344.