

Druga domača naloga iz Algebraičnih krivulj

1. [20T] Na vajah smo definirali polinome $T_n(t)$ rekurzivno kot $T_0(t) := 1$, $T_1(t) := t$ ter $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$. Pokažite, da je polinom $p(x, y) := T_n(x) - T_{n-1}(y)$ nerazcepen in analizirajte tangente od pripadajoče krivulje v singularnih točkah.
2. [20T] Poišči nerazcepne projektivne krivulje, za katere velja:
 - (a) polara za C glede na $[1, 0, 1]$ ima enačbo $3x^2 - 4yz = 0$,
 - (b) polara za C glede na točko $[2, 0, 1]$ ima enačbo $3x^2 - 2yz = 0$,
 - (c) premica $z = 0$ seka C v eni sami točki.

3. [20T] Naj bo podana kubika C z enačbo

$$8x^3 + 24x^2y + 24xy^2 + 9y^3 + 12x^2z + 24xyz + 12y^2z + 6xz^2 + 6yz^2 = 0.$$

Poiščite vsaj en prevoj kubike C in poiščite projektivnost, ki preslika C v Weierstrassovo kubiko $y^2z = x(x + \lambda_1z)(x + \lambda_2z)$.

4. [20T] Naj bo podana krivulja C v obliki $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$. Pokažite, da projektivnost

$$[x, y, z] \mapsto [X, Y, Z],$$

ki fiksira prevoj $[0, 1, 0]$, preslika krivuljo C v krivuljo

$$Y^2Z = X^3 + AXZ^2 + BZ^3$$

natanko tedaj, ko je $X = t^2x$ in $Y = t^3y$, kjer je $t \in \mathbb{C}$ neka neničelna konstanta. S pomočjo prejšnje naloge pokažite, da sta dve nesingularni kubiki

$$y^2z = x^3 + a_1xz^2 + b_1z^3, \quad y^2z = x^3 + a_2xz^2 + b_2z^3$$

projektivno ekvivalentni natanko tedaj, ko velja

$$\frac{4a_1^3}{4a_1^3 + 27b_1^2} = \frac{4a_2^3}{4a_2^3 + 27b_2^2}.$$