

1. izpit iz Afine in projektivne geometrije

3. junij 2014

1. [20] Izometrija evklidske ravnine $\tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dana s predpisom

$$\tau(x, y) = (y + 2, x + 2).$$

- (a) [10] Geometrično opiši izometrijo τ .
(b) [10] Zapiši τ kot kompozicijo treh zrcaljenj čez premice v ravnini.
2. (a) [10] V afinem prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dani ravnini Π in Σ . Ravnina Π je definirana s sistemom enačb:

$$\begin{aligned}x + y + z + 2w &= 10, \\x - y - z + w &= 1,\end{aligned}$$

ravnina Σ pa je podana parametrično v obliki

$$\Sigma = (1, 0, 0, 0) + \text{Lin}\{(-3, 1, -2, 2), (0, 2, -2, 0)\}.$$

Ali sta ravnini Π in Σ vzporedni?

- (b) [10] V afini ravnini $\mathbb{R}^2$ sta dani premici $p: y = 1$ in $q: y = 2$. Poišči vse afine transformacije $\tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki preslikajo premico p na premico q in ki pustijo vse točke na abscisni osi pri miru.
3. [20] Parametrizaciji $i_p: P(\mathbb{R}^2) \rightarrow p$ in $i_q: P(\mathbb{R}^2) \rightarrow q$ premic p in q v $P(\mathbb{R}^3)$ sta definirani s predpisoma:

$$\begin{aligned}i_p([x : y]) &= [x : y : y - x], \\i_q([x : y]) &= [2x : 2y : 2y - x].\end{aligned}$$

- (a) [6] Pokaži, da točke $A = [-1 : 0 : 1]$, $B = [0 : 1 : 1]$, $C = [1 : 2 : 1]$ in $D = [2 : 3 : 1]$ ležijo na p in izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$.
(b) [6] Naj bo $\theta: p \rightarrow q$ perspektivnost s centrom v točki $O = [2 : 0 : 1]$. Poišči točke $\theta(A)$, $\theta(B)$ in $\theta(D)$.
(c) [8] Izračunaj predpis za preslikavo $\theta' = i_q^{-1} \circ \theta \circ i_p: P(\mathbb{R}^2) \rightarrow P(\mathbb{R}^2)$.
4. [20] V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani stožnici:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \{[x : y : z] \mid x^2 + 6xy + y^2 - 4z^2 = 0\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 - 4z^2 = 0\}.\end{aligned}$$

- (a) [15] Poišči vse izrojene stožnice v šopu stožnic, ki ga določata stožnici $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ in skiciraj njihove slike na afinem delu projektivne ravnine glede na standardno vložitev afine ravnine v projektivno ravnino.
(b) [5] Poišči tisto stožnico iz danega šopa stožnic, ki vsebuje točko $[2 : 2 : 1]$.