

3. izpit iz Afine in projektivne geometrije

9. september 2014

1. [20] Naj bo $\tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rotacija za 90° v pozitivni smeri okoli točke $(-1, 2)$.
 - (a) [10] Zapiši predpis za preslikavo τ .
 - (b) [10] Zapiši preslikavo τ kot kompozitum dveh zrcaljenj v ravnini.
2. [20] Dana je končna afina ravnina $\mathbb{F}_5^2$.
 - (a) [5] Poišči predpis za afino transformacijo $\tau: \mathbb{F}_5^2 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$, ki zadošča pogojem $\tau(1, 1) = (1, 4)$, $\tau(0, 0) = (1, 2)$ in $\tau(1, 0) = (2, 2)$.
 - (b) [5] Poišči vse točke na vzporednici premice $p = \{(x, y) \in \mathbb{F}_5^2 \mid x + y = 3\}$, ki poteka skozi točko $(3, 2)$.
 - (c) [10] Izračunaj, koliko je različnih afinih transformacij $\tau: \mathbb{F}_5^2 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$, za katere je $\tau(0, 0) = (3, 2)$.
3. [20] V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ so dani premica

$$p = \{[x : y : z] \mid 2x + 3y - z = 0\}$$

ter točke $A = [1 : 0 : 1]$, $B = [1 : -1 : 0]$, $C = [1 : 2 : 3]$ in $D = [1 : 1 : 2]$.

- (a) [6] Pokaži, da so točke A, B, C in D kolinearne in izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$.
 - (b) [6] Naj bo q premica, ki vsebuje točke A, B, C in D . Ugotovi, ali se premici p in q sekata. Če se, izračunaj njun presek.
 - (c) [8] Naj projektivnost $\theta: q \rightarrow p$ zadošča pogojem $\theta(A) = [1 : 1 : 5]$, $\theta(B) = [1 : 0 : 2]$ in $\theta(C) = [0 : 1 : 3]$. Izračunaj $\theta(D)$.
4. [20] V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani stožnici:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \{[x : y : z] \mid 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8z^2 = 0\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \{[x : y : z] \mid x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0\}.\end{aligned}$$

- (a) [10] Skiciraj zožitev stožnice $\mathcal{S}_1$ na afino ravnino, ki je v projektivno ravnino vložena na standardni način, če vzamemo $z = 1$.
 - (b) [10] Pokaži, da sta stožnici $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ projektivno ekvivalentni in nato poišči projektivnost $\theta: P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, ki stožnico $\mathcal{S}_1$ preslika na $\mathcal{S}_2$.