

1. izpit iz Afine in projektivne geometrije

11. junij 2015

1. [20] Izometrija evklidske ravnine $\tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dana s predpisom

$$\tau(x, y) = (-x, -y + 4).$$

- (a) [10] Geometrično opiši izometrijo τ .
(b) [10] Razčleni τ kot kompozicijo dveh zrcaljenj čez premici v ravnini in zapiši predpisa za obe zrcaljenji.
2. [20] Dana je končna afina ravnina $\mathbb{F}_5^2$.
- (a) [6] Zapiši vse premice (skupaj s točkami), ki potekajo skozi točko $(1, 1)$.
(b) [6] Zapiši predpis za afino transformacijo $\tau: \mathbb{F}_5^2 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$, ki zadošča pogojem $\tau(1, 1) = (1, 1)$, $\tau(0, 0) = (3, 3)$ in $\tau(1, 0) = (4, 0)$.
(c) [8] Izračunaj, koliko je različnih afinih transformacij $\tau: \mathbb{F}_5^2 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$, za katere je $\tau(1, 1) = (1, 1)$.

3. [20] V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ so dani premica

$$p = \{[x : y : z] \mid x + z = 0\}$$

ter točke $A = [2 : 0 : -1]$, $B = [0 : 2 : 1]$, $C = [1 : 3 : 1]$ in $D = [1 : 1 : 0]$.

- (a) [8] Pokaži, da so točke A, B, C in D kolinearne in izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$ ter enačbo premice q , ki jih vsebuje.
(b) [8] Naj projektivnost $\theta: q \rightarrow p$ zadošča pogojem:

$$\theta(A) = [2 : -1 : -2],$$

$$\theta(B) = [0 : 1 : 0],$$

$$\theta(C) = [1 : 1 : -1].$$

Izračunaj $\theta(D)$ in $\theta^{-1}([-1 : 1 : 1])$.

- (c) [4] Ugotovi, ali je θ perspektivnost. Če je, poišči njen center.
4. [20] V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani stožnica in premica:

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid x^2 - 4y^2 - 4xz + 16yz - 16z^2 = 0\},$$

$$p = \{[x : y : z] \mid z = 0\}.$$

- (a) [8] Naj bosta A in B presečišči stožnice $\mathcal{S}$ in premice p . Izračunaj točki A in B ter nato še njuni polari p_A in p_B glede na $\mathcal{S}$.
(b) [4] Izračunaj pol C premice p glede na stožnico $\mathcal{S}$.
(c) [8] Skiciraj slike stožnice $\mathcal{S}$, premic p_A in p_B ter točke C na afinem delu projektivne ravnine glede na vložitev afine ravnine v projektivno ravnino, ki ustreza $z = 1$.