

2. izpit iz Afine in projektivne geometrije

24. junij 2015

1. [20] Izometrija evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ je dana z ortogonalno matriko

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- (a) [10] Geometrično opiši dano izometrijo.
(b) [10] Poišči najmanjše naravno število n , za katero velja $Q^n = \text{Id}$.
2. [20] Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslikava, ki je podana s predpisom

$$F(x, y, z) = (x + 2y + 3z + 1, 3x + 2z, x + z + 1).$$

- (a) [6] Pokaži, da je F afina transformacija.
(b) [7] Naj bo π ravnina, ki jo določajo točke $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, 2)$ in $C(3, 2, 2)$. Zapiši enačbo ravnine $F(\pi)$ v parametrični obliki.
(c) [7] Naj bo p premica s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (6, 2, 0) + t(1, 1, 1)$. Ugotovi, ali sta p in $F(\pi)$ vzporedni. Če nista, izračunaj njun presek.
3. [20] V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana premica

$$p = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$$

ter točki $A = [2 : 0 : -1]$ in $B = [2 : 3 : 2]$.

- (a) [6] Izračunaj enačbo premice q , ki poteka skozi točki A in B .
(b) [7] Pokaži, da točka $C = [2 : 2 : 1]$ leži na premici q in nato poišči takšno točko D na q , da bodo točke A , B , C in D tvorile harmonično četverko.
(c) [7] Naj bo $\theta : p \rightarrow q$ perspektivnost s centrom v $O = [0 : 3 : 1]$. Kam preslikava θ preslika točko $[2 : 3 : 0]$?
4. [20] V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani stožnici:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 - 2xz - 2yz + z^2 = 0\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \{[x : y : z] \mid 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4xz - 4yz + z^2 = 0\}. \end{aligned}$$

Poišči vse izrojene stožnice v šopu stožnic, ki ga določata stožnici $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ in skiciraj njihove slike na afinem delu projektivne ravnine glede na standardno vložitev afine ravnine v projektivno ravnino, ki ustreza $z = 1$.