

1. izpit iz Afine in projektivne geometrije

16. junij 2016

1. [25] Naj bo ABC enakokrak pravokotni trikotnik v $\mathbb{R}^2$ s pravim kotom pri oglišču C in naj bodo τ_{AB} , τ_{BC} in τ_{CA} zrcaljenja preko nosilk stranic trikotnika. Geometrično opiši izometriji:

$$\tau_1 = \tau_{AB} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{CA},$$

$$\tau_2 = \tau_{CA} \circ \tau_{AB} \circ \tau_{BC}.$$

2. V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dana ravnina $\pi : 2x + 3y - 2z = 3$, ki vsebuje točke $A(1, 3, 4)$, $B(-1, 1, -1)$, $C(0, 3, 3)$, $A'(3, 3, 6)$, $B'(2, 1, 2)$ in $C'(4, 3, 7)$.

(a) [10] Pokaži, da se trikotnika ABC in $A'B'C'$ ne sekata.

(b) [15] Konstruiraj afino transformacijo $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ki preslika ravnino π na ravnino $z = 0$ tako, da preslika trikotnik ABC v spodnjo polravnino, trikotnik $A'B'C'$ pa v zgornjo polravnino.

3. [25] V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ so dane premice:

$$p = \{[x : y : z] \mid x + y + z = 0\},$$

$$q = \{[x : y : z] \mid x - y - z = 0\},$$

$$r = \{[x : y : z] \mid x + z = 0\}.$$

Ugotovi, koliko je različnih projektivnosti $\theta : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, za katere je $\theta(p) = q$, $\theta(q) = p$, $\theta(r) = r$ in $\theta([0 : 0 : 1]) = [0 : 0 : 1]$? Nato poišči vse obrnljive matrike $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, ki porodijo projektivnosti, ki zadoščajo zgornjim pogojem.

4. (a) [15] Naj bo $\mathcal{S}$ neizrojena stožnica v $P(\mathbb{R}^3)$ in naj bo $\theta_A : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$ projektivnost, ki je porojena z obrnljivo matriko $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Denimo, da je za nek vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ premica

$$p = \{[x : y : z] \mid \vec{n} \cdot \vec{x} = 0\}$$

tangentna na stožnico $\mathcal{S}$. Pokaži, da potem premica

$$p' = \{[x : y : z] \mid A\vec{n} \cdot \vec{x} = 0\}$$

ni nujno tangentna na stožnico $\theta_A(\mathcal{S})$.

- (b) [10] Opiši družino matrik, za katere je premica p' zmeraj tangentna na stožnico $\theta_A(\mathcal{S})$.