

Afina in projektivna geometrija

1. izpit

6. 7. 2017

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Projektivno ogrodje projektivnega prostora $P(\mathbb{C}^3)$ se sestoji iz 4 točk.



Mnozica $\{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 - z^2 + x = 0\}$ je izrojena stožnica v $P(\mathbb{R}^3)$.



V afini ravnini $\mathbb{R}_7^2$ gre skozi vsako točko natanko 7 premic.



V projektivni ravnini $P(\mathbb{C}^3)$ sta premica $\{[x : y : z] \mid 2x - y + z = 0\}$ in stožnica $\{[x : y : z] \mid 9x^2 - 4xy - 6xz + z^2 = 0\}$ disjunktni.



Če je D točka v neskončnosti, so točke A , B , C in D harmonična četverka natanko tedaj, ko C razpolavlja daljico AB .



Naj bosta p_1 in p_2 vzporedni premici v aksiomatsko definirani afini ravnini. Potem poljubna premica q seka premico p_1 natanko takrat, ko seka premico p_2 .



Če izometrija evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ preslika obe koordinatni osi vsako nazaj nase, je identiteta.



Če je θ kolineacija, ki ji pripada avtomorfizmu f , in je dvorazmerje $D(A, B, C, D) = \lambda$, je $D(\theta(B), \theta(A), \theta(C), \theta(D)) = f(\lambda)^{-1}$.



Vsaka semilinearna preslikava $L : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ je linearna.



Obstaja končen obseg z natanko 256 elementi.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $ABCD$ kvadrat v $\mathbb{R}^2$ in naj bodo τ_{AB} , τ_{BC} , τ_{CD} in τ_{DA} zrcaljenja preko nosilk stranic kvadrata. Definirajmo izometrijo $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\tau = \tau_{AB} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{CD} \circ \tau_{DA}.$$

- (a) Geometrično opiši izometrijo τ .
- (b) Ali lahko izometrijo τ zapišemo kot kompozicijo treh zrcaljenj čez neke premice v $\mathbb{R}^2$?

3. naloga (20 točk)

V prostoru $\mathbb{R}^3$ je dana piramida $ABCD$ z oglišči $A(1, 1, 2)$, $B(2, 2, 0)$, $C(4, 0, 0)$ in $D(1, 1, 6)$.

- (a) Koliko je različnih afinih transformacij $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ki preslikajo piramido $ABCD$ nazaj nase?
- (b) Ali katera od afinih transformacij, ki preslikajo piramido $ABCD$ nazaj nase, preslika točko $T_1(2, 1, 2)$ v točko $T_2(5, 1, 2)$?

4. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ so dane premice:

$$\begin{aligned} p_1 &= \{[x : y : z] \mid y = 0\}, \\ p_2 &= \{[x : y : z] \mid x - z = 0\}, \\ p_3 &= \{[x : y : z] \mid y - z = 0\}, \\ p_4 &= \{[x : y : z] \mid x = 0\}. \end{aligned}$$

- (a) Poišči vse obrnljive matrike $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, ki porodijo projektivnost $\theta : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, za katero je $\theta(p_1) = p_2$, $\theta(p_2) = p_3$, $\theta(p_3) = p_4$ in $\theta(p_4) = p_1$.
- (b) Naj bo $p = \{[x : y : z] \mid x + y + z = 0\}$. Opiši sliko $\theta(p)$.

5. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid 9x^2 - 4xy - 8xz + 2yz + 2z^2 = 0\}.$$

- (a) Izračunaj enačbe vseh tangent na $\mathcal{S}$, ki vsebujejo točko $T = [3 : 4 : 4]$.
- (b) Naj bo $\theta : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$ projektivnost, ki je dana s predpisom

$$\theta([x : y : z]) = [-x + z : 3x - y - z : -x + y].$$

Zapiši enačbo stožnice $\theta(\mathcal{S})$.