

Afina in projektivna geometrija

2. izpit

23. 8. 2017

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

N Množica $\{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0\}$ je neizrojena stožnica v $P(\mathbb{R}^3)$.

N Projektivnost $\theta_A : P(\mathbb{R}^2) \rightarrow P(\mathbb{R}^2)$ je porojena z matriko $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Potem velja $\theta_A^2 = \text{Id}$.

N V projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_{11}^3)$ na vsaki premici leži natanko 12 točk.

N Stožnica $\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ in premica $p = \{[x : y : z] \mid 2x + iy - 3z = 0\}$ imata prazen presek v $P(\mathbb{C}^3)$.

N Poljubni stožnici v $P(\mathbb{R}^3)$ se sekata v največ dveh točkah.

N V afini ravnini $\mathbb{H}^2$, kjer je $\mathbb{H}$ obseg kvaternionov, velja Pappusov izrek.

N Izometrija evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ je natanko določena s slikama točk $(1, 0)$ in $(0, 1)$.

N Za različne kolinearne točke A, B, C in D v $P(\mathbb{R}^3)$ velja $\mathcal{D}(A, B, C, D) = 1$. Potem je $\mathcal{D}(D, C, A, B) = 1$.

N Obstaja linearna preslikava $L : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, ki ni semilinearna.

N Število elementov končnega obsega je praštevilo.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ izometrija s predpisom

$$\tau(x, y, z) = (z + 2, y, 2 - x).$$

- (a) Geometrično opiši izometrijo τ .
- (b) Zapiši izometrijo τ kot kompozicijo dveh zrcaljenj čez neki ravnini v $\mathbb{R}^3$.

3. naloga (20 točk)

V afini ravnini $\mathbb{F}_7^2$ so dane premice $p : y = 0$, $p' : x - y = 6$, $q : x = 0$ in $q' : x + y = 1$. Naj bo M množica afinih transformacij $\tau : \mathbb{F}_7^2 \rightarrow \mathbb{F}_7^2$, ki preslikajo premico p na premico p' , premico q pa na premico q' .

- (a) Koliko elementov ima množica M ?
- (b) Ali tvori množica M grupo za komponiranje?

4. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana premica $p = \{[x : y : z] \mid x - y = 0\}$ in premica q skozi točki $A = [2 : 0 : -1]$ in $B = [2 : 4 : 1]$.

- (a) Naj bo $\theta : p \rightarrow q$ projektivnost, ki je določena s pogoji $\theta([0 : 0 : 1]) = [2 : 0 : -1]$, $\theta([1 : 1 : 1]) = [0 : 4 : 2]$ in $\theta([2 : 2 : 1]) = [2 : 4 : 1]$. Kam projektivnost θ preslika točko $[1 : 1 : 0]$?
- (b) Ugotovi, ali je θ perspektivnost. Če je, poišči njen center.

5. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ so dane točke $T_1 = [0 : 0 : 1]$, $T_2 = [2 : 0 : 1]$, $T_3 = [3 : 1 : 1]$ in $T_4 = [2 : 1 : 1]$. Poišči vse izrojene stožnice v šopu stožnic, ki ga določajo dane točke in skiciraj njihove slike na afinem delu projektivne ravnine glede na standardno vložitev afine ravnine v projektivno ravnino, ki ustreza $z = 1$.