

Afina in projektivna geometrija

3. izpit

7. 9. 2017

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Če različne kolinearne točke A, B, C in D v $P(\mathbb{R}^3)$ tvorijo harmonično četverko, je $\mathcal{D}(A, D, B, C) = \frac{1}{2}$.



Vsaka kolineacija $\vartheta: P(\mathbb{C}^3) \rightarrow P(\mathbb{C}^3)$ je projektivnost.



Obstaja končna aksiomatsko definirana afina ravnina s 16 točkami.



Množica $\{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$ je projektivno ogrodje za $P(\mathbb{R}^3)$.



Vsaka premica seka neizrojeno stožnico v $P(\mathbb{C}^3)$.



Moultonova ravnina je izomorfna afini ravnini nad komutativnim obsegom.



Vsako izometrijo evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ lahko zapišemo kot kompozicijo dveh zrcaljenj čez premici v ravnini.



Projektivnost $\vartheta: P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$ je identiteta natanko tedaj, ko ima vsaj 4 negibne točke.



Afina transformacija $\tau: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ slika vzporedni premici v vzporedni premici.



Vsak končni obseg je komutativen.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ izometrija s predpisom

$$\tau(x, y) = (y + 2, x).$$

- (a) Geometrično opiši izometrijo τ in jo nato zapiši kot kompozicijo treh zrcaljenj čez premice v ravnini $\mathbb{R}^2$.
- (b) Kateri znani grupi je izomorfna grupa izometrij $\mathbb{R}^2$, ki jo generira izometrija τ ?

3. naloga (20 točk)

V afini ravnini $\mathbb{R}^2$ je dan kvadrat K z oglišči $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 2)$ in $D(1, 2)$.

- (a) Zapiši predpise vseh dilatacij $\mathbb{R}^2$, ki preslikajo kvadrat K nazaj nase.
- (b) Koliko je različnih afinih transformacij $\mathbb{R}^2$, ki preslikajo kvadrat K nazaj nase?

4. naloga (20 točk)

Naj bo $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$ standardna vložitev afine ravnine v projektivno ravnino s predpisom $i(x, y) = [x : y : 1]$. Definirajmo afino transformacijo $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\tau(x, y) = (x + 2, y + 1).$$

- (a) Pokaži, da obstaja natanko ena projektivnost $\theta : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, za katero velja $\theta \circ i = i \circ \tau$. Nato izračunaj predpis projektivnosti θ .
- (b) Poišči vse fiksne točke projektivnosti θ .

5. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani stožnici:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \{[x : y : z] \mid x^2 + 4xy + y^2 + 2z^2 = 0\}, \\ \mathcal{S}_2 &= \{[x : y : z] \mid 2xy - z^2 = 0\}.\end{aligned}$$

- (a) Poišči vse izrojene stožnice v šopu stožnic, ki ga določata $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$.
- (b) Poišči tisto stožnico v danem šopu stožnic, ki vsebuje točko $[0 : 0 : 1]$.