

Afina in projektivna geometrija

1. izpit

26. 6. 2018

1. naloga (20 točk)

V evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ je dan kvadrat $ABCD$ z oglišči $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 2)$ in $D(1, 2)$. Označimo s τ_{AC} in τ_{BD} zrcaljenji preko diagonal kvadrata in definirajmo izometrijo $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\tau = \tau_{BD} \circ \tau_{AC}.$$

- (a) Zapiši predpis za izometrijo τ in jo geometrično opiši.
- (b) Naj bo G grupa izometrij $\mathbb{R}^2$, ki jo generirata τ_{AC} in τ_{BD} . Ali grupa G vsebuje rotacijo okoli oglišča A za 90° v pozitivni smeri?

2. naloga (20 točk)

V evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$ je dan trikotnik ABC z oglišči $A(2, 2, 0)$, $B(0, 0, 2)$ in $C(1, 3, 0)$ in premica p s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (0, 2, 3) + t(1, 1, 1)$.

- (a) Ugotovi, ali premica p seka trikotnik ABC .
- (b) Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ afina transformacija s predpisom $F(x, y, z) = (x + y + z + 1, y + z, z + 2)$ in Π ravnina, ki vsebuje trikotnik ABC . Ali je ravnina $F(\Pi)$ vzporedna premici p ?

3. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_5^3)$ so dane premice:

$$\begin{aligned} p &= \{[x : y : z] \mid x = 0\}, \\ q &= \{[x : y : z] \mid y = 0\}, \\ r &= \{[x : y : z] \mid z = 0\}. \end{aligned}$$

Naj bo H grupa vseh projektivnosti $\theta : P(\mathbb{F}_5^3) \rightarrow P(\mathbb{F}_5^3)$, za katere je $\theta(p) = p$, $\theta(q) = q$, $\theta(r) = r$.

- (a) Pokaži, da obstaja natanko ena projektivnost $\theta \in H$ za katero je $\theta([1 : 1 : 1]) = [2 : 2 : 1]$ in izračunaj njen predpis.
- (b) Izračunaj moč grupe H . Ali je grupa H komutativna?

4. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ so dane točke $T_1 = [0 : 0 : 1]$, $T_2 = [1 : 0 : 1]$, $T_3 = [0 : 1 : -1]$ in $T_4 = [2 : -2 : 1]$.

- (a) Izračunaj enačbe vseh izrojenih stožnic v $P(\mathbb{R}^3)$, ki vsebujejo dane štiri točke. Nato skiciraj njihove zožitve na afino ravnino $z = 1$.
- (b) Izračunaj enačbo neizrojene stožnice $\mathcal{S}$, ki vsebuje dane štiri točke in ima lastnost, da je premica $p = \{[x : y : z] \mid 2x + y = 0\}$ tangenta na $\mathcal{S}$ v točki T_1 .