

Afina in projektivna geometrija

2. izpit

22. 8. 2018

1. naloga (20 točk)

Izometrija evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ je dana s predpisom

$$\tau(x, y, z) = \frac{1}{2}(-x + y - \sqrt{2}z, x - y - \sqrt{2}z, \sqrt{2}x + \sqrt{2}y).$$

- (a) Geometrično opiši izometrijo τ .
- (b) Poišči vsa naravna števila n , za katere velja $\tau^n = \text{Id}$.

2. naloga (20 točk)

- (a) Poišči predpis za afino transformacijo $\tau : \mathbb{F}_5^2 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$, ki zadošča pogojem $\tau(1, 1) = (0, 1)$, $\tau(1, 0) = (1, 1)$ in $\tau(0, 1) = (1, 0)$.
- (b) Izračunaj, koliko je različnih afinih transformacij $\tau : \mathbb{F}_5^2 \rightarrow \mathbb{F}_5^2$, ki preslikajo afino premico p z enačbo $x + y = 1$ nazaj nase.

3. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana premica

$$p = \{[x : y : z] \mid x - y + z = 0\}$$

ter premica q skozi točki $A = [-2 : 0 : 1]$ in $B = [0 : 2 : 1]$.

- (a) Poišči presečišče C premic p in q ter nato poišči tisto točko D na premici q , za katero tvorijo točke A, B, C in D harmonično četverko.
- (b) Določi predpis za perspektivnost $\theta : p \rightarrow q$ s centrom $O = [0 : 0 : 1]$.

4. naloga (20 točk)

Naj bo $\mathcal{S}$ neizrojena stožnica v $P(\mathbb{R}^3)$ in naj bo $\theta_Q : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$ projektivnost, ki je porojena z ortogonalno matriko $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Denimo, da je za nek vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ premica

$$p = \{[x : y : z] \mid \vec{n} \cdot \vec{x} = 0\}$$

tangentna na stožnico $\mathcal{S}$. Pokaži, da je potem premica

$$p' = \{[x : y : z] \mid Q\vec{n} \cdot \vec{x} = 0\}$$

tangentna na stožnico $\theta_Q(\mathcal{S})$.