

## Afina in projektivna geometrija

3. izpit

6. 9. 2018

### 1. naloga (20 točk)

Izometrija evklidske ravnine  $\mathbb{R}^2$  je dana s predpisom

$$\tau(x, y) = (-x + 4, y + 2).$$

- (a) Geometrično opiši izometrijo  $\tau$  in jo nato zapiši kot kompozicijo treh zrcaljenj čez premice v ravnini.
- (b) Naj bo  $G$  množica vseh izometrij  $\mathbb{R}^2$ , ki komutirajo s  $\tau$ . Pokaži, da je  $G$  grupa. Ali je  $G$  končna grupa?

### 2. naloga (20 točk)

V afini ravnini  $\mathbb{R}^2$  sta dani premici  $p : y = 1$  in  $q : x = 0$  ter krožnici  $K : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$  in  $K' : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ .

- (a) Poišči predpise vseh dilatacij  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , za katere je  $\tau(p) = p$ ,  $\tau(q) = q$  in  $\tau(K) = K'$ .
- (b) Ali obstaja afina transformacija  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ki ustreza pogojem iz (a) in ni dilatacija?

### 3. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini  $P(\mathbb{F}_5^3)$  sta dani premici:

$$\begin{aligned} p &= \{[x : y : z] \mid x - y = 0\}, \\ q &= \{[x : y : z] \mid x + y - 4z = 0\}. \end{aligned}$$

- (a) Projektivnost  $\theta : p \rightarrow q$  je določena s pogoji:

$$\begin{aligned} \theta([0 : 0 : 1]) &= [0 : 4 : 1], \\ \theta([1 : 1 : 0]) &= [1 : 3 : 1], \\ \theta([1 : 1 : 1]) &= [1 : 4 : 0]. \end{aligned}$$

Pokaži, da je  $\theta$  perspektivnost in poišči njen center.

- (b) Ugotovi, koliko je različnih projektivnosti s premice  $p$  na premico  $q$ .

### 4. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini  $P(\mathbb{R}^3)$  je dana stožnica

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid 3x^2 + 4xy + 3y^2 - z^2 = 0\}.$$

- (a) Skiciraj zožitev stožnice  $\mathcal{S}$  na afino ravnino, ki je v projektivno ravnino vložena na standardni način, če vzamemo  $z = 1$ .
- (b) Naj bo projektivnost  $\theta : P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$  dana s predpisom

$$\theta([x : y : z]) = [x + 2y + z : 2x + y + z : x + y + z].$$

Izračunaj enačbo stožnice  $\theta(\mathcal{S})$ .