

Afina in projektivna geometrija

1. izpit

14. 6. 2019

1. naloga (20 točk)

- (a) V evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ sta dana trikotnika ABC in DEF z oglišči $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, $D(4, 4)$, $E(3, 4)$ in $F(4, 3)$. Izračunaj predpise vseh izometrij $\mathbb{R}^2$, ki preslikajo trikotnik ABC na trikotnik DEF . Za vsako od njih opiši njen geometrični pomen.
- (b) Dana je izometrija $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ s predpisom $\tau(x, y, z) = (x, 2 - y, -z)$. Poišči ravnini Π_1 in Π_2 v $\mathbb{R}^3$, za kateri velja, da je izometrija τ enaka kompoziciji zrcaljenj čez ti dve ravnini.

2. naloga (20 točk)

- (a) V afinem prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ sta dani afina premica p in afina ravnina Π . Privzemimo, da p in Π nista vzporedni. Pokaži, da se p in Π potem sekata v natanko eni točki.
- (b) Naj bo Σ ravnina v $\mathbb{Z}_5^3$ z enačbo $x + y + z = 1$. Koliko je vseh afinih premic v $\mathbb{Z}_5^3$, ki ne sekajo ravnine Σ ?

3. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana točka $O = [0 : 0 : 1]$ in premici:

$$p = \{[x : y : z] \mid x - z = 0\},$$
$$q = \{[x : y : z] \mid z = 0\}.$$

- (a) Naj bo $\theta : p \rightarrow q$ perspektivnost s centrom O . Označimo $A = \theta([1 : 0 : 1])$, $B = \theta([1 : 1 : 1])$ in $C = \theta([1 : 2 : 1])$. Poišči takšno točko D na premici q , da bodo tvorile točke A , B , C in D harmonično četverko.
- (b) Naj bo M množica vseh projektivnosti $P(\mathbb{R}^3)$, ki imajo točko O in vse točke na premici q za negibne točke. Pokaži, da je M grupa. Ali je komutativna?

4. naloga (20 točk)

V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid 3x^2 - 10xy + 3y^2 - 8z^2 = 0\}.$$

- (a) Poišči presek stožnice $\mathcal{S}$ s premico $p = \{[x : y : z] \mid z = 0\}$. Za vsako izmed točk v preseku nato izračunaj enačbo tangente na stožnico v tej točki.
- (b) Skiciraj zožitev stožnice $\mathcal{S}$ na afini del projektivne ravnine, ki ustreza $z = 1$.